Mathematik-GK

Unterrichtsskript

Thomas Klein

Mai 2018

Inhaltsverzeichnis

I

Analysis I

1 Funktionen und ihre Darstellung

1.1 Allgemeines zu Funktionen

1.1.1 Grundlagen

Definition 1.1 *Eine* **Funktion** *f beschreibt, wie man aus einer Zahlengröße x eine Zahlengröße y auf eindeutige Weise berechnen kann. Anders formuliert erhält f eine Zahl x als Eingabe und liefert eine eindeutige Zahl y als Ausgabe.*

$$f : x \mapsto y$$

Wir schreiben $f(a)$ für den y-Wert, der zum x-Wert $x = a$ gehört.
Die Menge aller Zahlen, die für x zugelassen sind, heißt **Definitionsmenge** *$\mathbb{D}_f$, die Menge aller y-Werte, die die Funktion annehmen kann, heißt* **Wertemenge** *$\mathbb{W}_f$.*
Anstelle von x, y und f können auch andere, besser zur Situation passende Buchstaben verwendet werden.

Beispiel 1.2

(a) Wir betrachten die Funktion

$$u\text{: Seitenlänge eines Quadrats in cm} \mapsto \text{Umfang des Quadrats in cm}$$

Dann gilt $u(s) = 4s$, wobei s die Seitenlänge ist und $u(s)$ der Umfang.
Dann gilt z.B. $u(1) = 4$, $u(8) = 32$ und $u\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.
Außerdem ist $\mathbb{D}_u = [0; \infty[$ und $\mathbb{W}_u = [0; \infty[$.

(b) Die Funktion

$$s\text{: Zeit in s} \mapsto \text{Zurückgelegte Strecke im freien Fall in m}$$

hat die Gleichung $s(t) = 5t^2$, wobei t die Zeit ist und $s(t)$ die gefallene Strecke.
Hier gilt $\mathbb{D}_s = [0; \infty[$ und $\mathbb{W}_s = [0; \infty[$. Werte sind z.B. $s(2) = 20$ und $s(5) = 125$, d.h. nach 5 Sekunden wurden $125\,\text{m}$ zurückgelegt.

(c) Ein Brötchen kostet $30\,\text{ct}$. Die Funktion

$$p\text{: Anzahl Brötchen} \mapsto \text{Preis in €}$$

hat dann die Gleichung $p(b) = 0{,}3b$, wobei b die Anzahl der Brötchen ist und $p(b)$ der Preis.
Hier gilt: $p(0) = 0$ und $p(4) = 1{,}2$. Es ist $\mathbb{D}_p = \mathbb{N}_0$ und es wäre kompliziert $\mathbb{W}_p$ anzugeben.

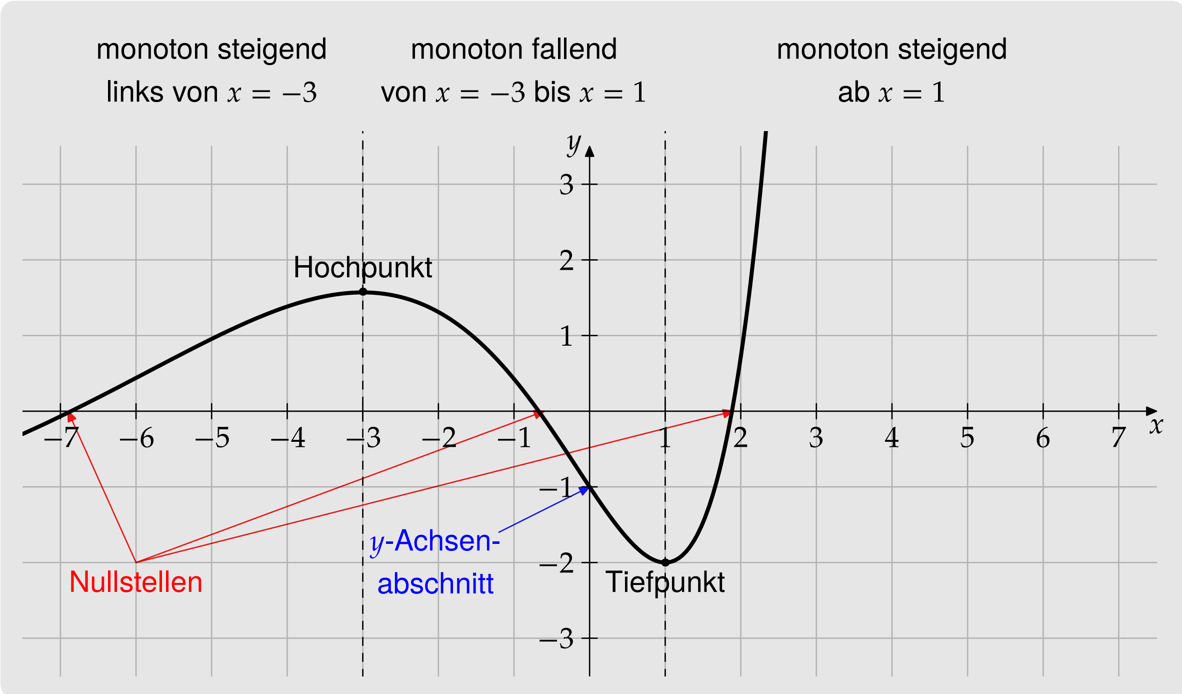


Abbildung 1 Wichtige Eigenschaften von Funktionen.

#

Funktionen lassen sich auf verschiedene Weisen darstellen:

Definition 1.3 *Unter einer* **Wertetabelle** *einer Funktion f versteht man eine Tabelle, die eine Auswahl von x-Werten mit zugehörigen y-Werten enthält.*

Beispiel 1.4 Wertetabelle für die Funktion u:

s	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$u(s)$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

#

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit ist der Graph einer Funktion:

Definition 1.5 *Der* **Graph** *einer Funktion f besteht aus allen Punkten der Form $(x \mid f(x))$.*

Man erhält also einen Punkt auf dem Graphen, indem man eine Zahl für x einsetzt. Umgekehrt kann man überprüfen, ob ein Punkt auf dem Graphen liegt, indem man die x-Koordinate des Punktes einsetzt und überprüft, ob die y-Koordinate herauskommt.

Beispiel 1.6 #

1.1.2 Eigenschaften von Funktionen

Funktionen beschreiben also Zusammenhänge zwischen zwei Größen. Die Untersuchung von Funktionen (sog. »Analysis«) soll also Fragen der folgenden Art beantworten:

(1) Welchen y-Wert hat eine Funktion an einer bestimmten x-Stelle?

(2) An welchen Stellen hat eine Funktion einen bestimmten y-Wert?

(3) Wie ändern sich die y-Werte, wenn man die x-Werte ändert?

(4) An welchen Stellen erreicht die Funktion einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt?

Zur Beantwortung dieser Fragen, werden bestimmte Eigenschaften von Funktionen untersucht:

Definition 1.7 *Die wichtigsten Eigenschaften einer Funktion f sind die folgenden (vgl.* **Abb. 1***):*

(a) Die y-Koordinate, an der der Funktionsgraph die y-Achse schneidet, heißt **y-Achsenabschnitt**.

(b) Die x-Koordinaten der Punkte, an denen der Graph die x-Achse schneidet, werden **Nullstellen** *genannt.*

(c) Ein Punkt des Graphen, der in einem gewissen Bereich der höchste [tiefste] Punkt des Graphen ist, heißt **Hochpunkt [Tiefpunkt]**.
Algemein heißt ein Punkt, der Hoch- oder Tiefpunkt ist, **Extrempunkt**.

(d) Wenn die y-Werte mit steigendem x immer größer [kleiner] werden, nennt man die Funktion **monoton steigend [fallend]**. *Ein Intervall, über dem die Funktion ihre Monotonie nicht ändert (also z.B. immer monoton steigend ist), heißt* **Monotoniebereich**.

Aus der Kenntnis dieser Eigenschaften kann man den Verlauf eines Funktionsgraphen sehr genau ohne weitere Rechnungen rekonstruieren.

Aufgabe 1.1 Gegeben ist eine Funktion f mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Der y-Achsenabschnitt ist 4.
(2) Die Nullstellen sind -3 und 3.
(3) Sie ist von $x = 0$ bis $x = 3$ monoton fallend.
(4) Sie ist rechts von 3 monoton steigend.
(5) Sie ist symmetrisch zur y-Achse.

(a) Skizzieren Sie den Funktionsgraph im Bereich $[-6; 6]$.
(b) Geben Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von f an.
(c) Begründen Sie, dass f keine weiteren Nullstellen haben kann.

#

1.2 Punkte und Abstände

Definition 1.8 *Ein* **Punkt** $A = (x \mid y)$ *wird durch zwei* **Koordinaten** x *und* y *in einem Koordinatensystem eindeutig festgelegt.*

Satz 1.9 Gegeben seien zwei Punkte $A = (x_1 \mid y_1)$ und $B = (x_2 \mid y_2)$.

(a) Der **horizontale Änderung** von A zu B wird mit $\Delta x = x_2 - x_1$ bezeichnet.

(b) Der **vertikale Änderung** von A zu B wird mit $\Delta y = y_2 - y_1$ bezeichnet.

(c) Für den **Abstand** von A und B gilt

$$|AB| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Beweis: Übung! Satz des Pythagoras! □

Beispiel 1.10 $A = (5 \mid -3)$, $B = (-2 \mid -4)$
$\Rightarrow \Delta x = -2 - 5 = -7$, $\Delta y = -4 - (-3) = -1$
$\Rightarrow |AB| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} \approx 7{,}071$ #

1.3 Lineare Funktionen

Die einfachsten und gleichzeitig wichtigsten Funktionen sind die, bei denen y gleichmäßig von x abhängt:

Definition 1.11 *Eine Funktion f heißt* **linear**, *wenn sich die Funktionsgleichung in der Form*

$$f(x) = m \cdot x + b$$

schreiben lässt.

Satz 1.12 Eine lineare Funktion $f(x) = mx + b$ hat folgende Eigenschaften (vgl. **Abb. 2**):

(1) Der Graph ist eine Gerade und hat damit keine Hoch- oder Tiefpunkte.

(2) Der Parameter b gibt den y-Achsenabschnitt an.

(3) Der Parameter m gibt die **Steigung** oder **Änderungsrate** an:

- 1 Schritt nach rechts ändert den y-Wert um m.
- $2{,}5$ Schritte nach rechts ändern den y-Wert um $2{,}5m$.
- Δx Schritte nach rechts ändern den y-Wert um $\Delta y = \Delta x \cdot m$.

Daher gilt die für die Analysis unglaublich wichtige Formel

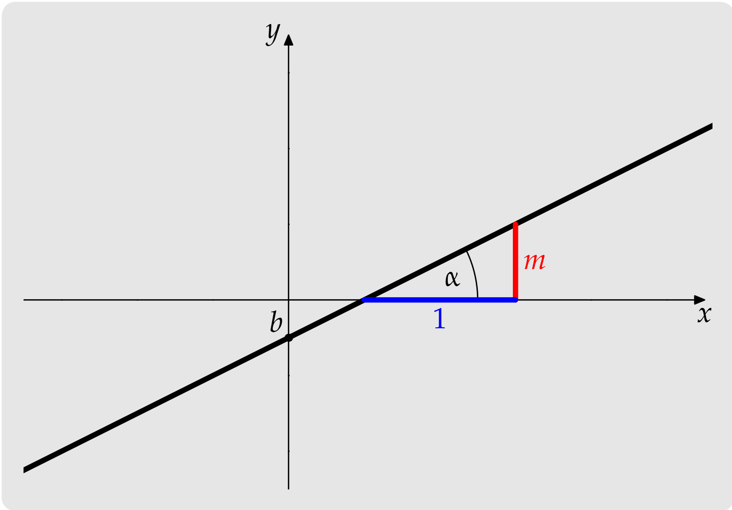


Abbildung 2 Die Abbildung zeigt den Einfluss der Parameter m und b in der Funktionsgleichung $f(x) = mx + b$.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(4) Für den Schnittwinkel α der Geraden mit der x-Achse gilt $\tan(\alpha) = m$.

(5) Eine weitere Gerade g ist genau dann **parallel** zu f, wenn die Steigungen gleich sind:

$$f \parallel g \iff m_1 = m_2$$

(6) Eine weitere Gerade g ist genau dann **orthogonal** zu f, wenn deren Steigung der negative Kehrwert der Steigung von f ist:

$$f \perp g \iff m_1 \cdot m_2 = -1$$

Beweis:

(1) Dies liegt an (3): Die Steigung des Graphen ändert sich nicht, darum entsteht eine Gerade.

(2) $f(0) = m \cdot 0 + b = b \Rightarrow$ Graph verläuft durch $(0 \mid b)$.

(3) An der Stelle x hat der Graph die y-Koordinate $y = f(x) = mx+b$, er verläuft also durch $(x \mid mx+b)$.

- Für $\Delta x = 1$: $y' = f(x+1) = m(x+1) + b = mx + m + b \Rightarrow \Delta y = y' - y = m$
- Für $\Delta x = 2{,}5$: $y' = f(x+2{,}5) = m(x+2{,}5) + b = mx + m \cdot 2{,}5 + b \Rightarrow \Delta y = y' - y = 2{,}5m$
- Allgemein: $y' = f(x+\Delta x) = m(x+\Delta x) + b = mx + m \cdot \Delta x + b \Rightarrow \Delta y = y' - y = \Delta x \cdot m$

Dividiert man die Formel $\Delta y = \Delta x \cdot m$ durch Δx, so erhält man $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

(4) Falls die Gerade die x-Achse schneidet, ergibt sich das Bild aus **Abb. 2.** Im eingezeichneten Dreieck gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{m}{1} = m$$

□

Beispiel 1.13 In welchem Punkt und in welchem Winkel schneidet die Gerade durch die Punkte $A = (-3 \mid 5)$ und $B = (4 \mid -9)$ die x-Achse? In welchem Punkt und welchem Winkel schneidet sie die y-Achse?

(1) Ansatz: $f(x) = mx + b$
(2) m bestimmen: Aus A und B: $\Delta x = 7$, $\Delta y = -14 \Rightarrow m = \frac{-14}{7} = -2$
(3) b bestimmen:

$$\begin{aligned} y &= -2x + b && \mid \text{Einsetzen von } A = (-3 \mid 5) \\ 5 &= -2 \cdot -3 + b && \mid \text{Vereinfachen} \\ 5 &= 6 + b && \mid -6 \\ -1 &= b \end{aligned}$$

(4) Funktionsgleichung: $f(x) = -2x - 1$
(5) Schnittpunkt mit x-Achse (Nullstelle):

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -2x - 1 &= 0 && \mid +1 \\ -2x &= 1 && \mid : (-2) \\ x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Also SP $(-0{,}5 \mid 0)$.
(6) Schnittwinkel mit x-Achse:

$$\tan(\alpha) = m = -2 \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(-2) \approx -63{,}435°$$

(7) Schnittpunkt mit der y-Achse (y-Achsenabschnitt): $(0 \mid b) = (0 \mid -1)$.
(8) Schnittwinkel mit der y-Achse: $90° - 63{,}435° = 26{,}565°$.

#

Beispiel 1.14 Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A = (0 \mid 0)$, $B = (3 \mid -1)$ und $C = (3 \mid 5)$. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks?

(1) Gesucht: Fläche $F = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$. c und h_c sind noch unbekannt!
(2) $c = |AB| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}162$

(3) Gleichung von Gerade AB bestimmen:
  (1) Ansatz: $f(x) = mx + b$
  (2) m: $m = \frac{-1-0}{3-0} = -\frac{1}{3}$
  (3) b: Einsetzen von $A = (0 \mid 0)$: $0 = -\frac{1}{3} \cdot 0 + b \Rightarrow b = 0$
  (4) $f(x) = -\frac{1}{3}x$
(4) Gleichung der Höhe h_c bestimmen:
  (1) Ansatz: $g(x) = mx + b$
  (2) m: $g \perp f \Rightarrow m = \frac{3}{1} = 3$
  (3) b: Einsetzen von $C = (3 \mid 5)$: $5 = 3 \cdot 3 + b \Rightarrow b = -4$
  (4) $g(x) = 3x - 4$
(5) Bestimme Schnittpunkt S von f und g:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ -\frac{1}{3}x &= 3x - 4 && \mid \cdot 3 \\ -x &= 9x - 12 && \mid -9x \\ -10x &= -12 && \mid : (-10) \\ x &= 1{,}2 \end{aligned}$$

  $y = g(1{,}2) = 3 \cdot 1{,}2 - 4 = -0{,}4 \Rightarrow S = (1{,}2 \mid -0{,}4)$
(6) $h_c = |CS| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(1{,}2-3)^2 + (-0{,}4-5)^2} = \sqrt{32{,}4} \approx 5{,}692$
(7) Fläche: $F = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{32{,}4} = 9$

#

1.4 Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen sind etwas komplizierter als lineare Funktionen. Trotzdem können diese mit den Methoden der Mittelstufe vollständig untersucht werden.

Definition 1.15 *Eine Funktion f heißt* **quadratisch**, *wenn man sie in der Form*

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mit $a \neq 0$ schreiben kann.

Das für uns wichtigste Konzept wird die *Krümmung* sein:

Definition 1.16 *Eine Kurve heißt* **linksgekrümmt** *bzw.* **rechtsgekrümmt**, *wenn man beim Durchfahren der Kurve in steigende x-Richtung nach links bzw. rechts lenken müsste.*

Damit können wir die Eigenschaften quadratischer Funktionen zusammenfassen:

Satz 1.17 Für eine quadratische Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ gilt:

(a) Der Graph ist eine verschobene und/oder gestauchte/gestreckte **Normalparabel**.

(b) Man kann f in die **Scheitelform**

$$f(x) = a(x-d)^2 + e$$

überführen (durch quadratische Ergänzung oder Koeffizientenvergleich).

(c) f hat einen einzigen Hoch- bzw. Tiefpunkt, der **Scheitelpunkt** S genannt wird.

(d) Es gilt $S = (d \mid e)$.

(e) f ist achsensymmetrisch. S liegt auf der Symmetrieachse.

(f) Vom Scheitelpunkt aus gilt: Eine Änderung von x um Δx bewirkt eine Änderung von y um $\Delta y = a \cdot (\Delta x)^2$

(g) f ist linksgekrümmt, wenn $a > 0$.

(h) f ist rechtsgekrümmt, wenn $a < 0$.

(i) f kann 2, 1 oder keine Nullstellen haben.

(j) Falls $a = 1$, $b = p$ und $c = q$, gilt für die Nullstellen x_1 und x_2 die ***p-q*-Formel**:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beweis:

(a) Die Normalparabel wird um d nach rechts und um e nach oben verschoben, da der Scheitelpunkt nach (d) bei $(d \mid e)$ liegt. Wegen (f) verläuft die Parabel umso schmaler, je größer $|a|$ ist und umso breiter, je kleiner $|a|$ ist.

(b) Man kann immer die Scheitelform ausmultiplizieren, mit f vergleichen und die Zahlen d und e bestimmen.
Z.B. $f(x) = 3x^2 + 7x - 2$:

(1) $f(x) = a(x-d)^2 + e = a(x^2 - 2dx + d^2) + e = (a)x^2 + (-2ad)x + (ad^2 + e)$

(2) Vergleichen mit $(3)x^2 + (7)x + (-2)$: $a = 3$, $-2 \cdot 3 \cdot d = 7 \Rightarrow d = -\frac{7}{6}, 3 \cdot \left(\frac{7}{6}\right)^2 + e = -2 \Rightarrow e = -\frac{73}{12}$

(3) $\Rightarrow f(x) = 3(x - \frac{7}{6})^2 - \frac{73}{12}$

(c) Beispiel: $f(x) = -2(x-3)^2 + 4 = 4 - 2(x-3)^2$, d.h. von dem y-Wert 4 wird die Zahl $2(x-3)^2$ abgezogen, die niemals negativ sein kann. y wird also umso größer, je kleiner $2(x-3)^2$ ist. Das kleinstmögliche Ergebnis für $2(x-3)^2$ ist 0 und dies ist der Fall für $x = 3$. Also ist $(3 \mid 4)$ der höchste Punkt der Kurve.

(d) Siehe vorangegangenen Punkt.

(e) $f(x) = a(x-d)^2+e$. Dann: $f(d) = e$ und $f(d+\Delta x) = a(d+\Delta x-d)^2+e = a\cdot(\Delta x)^2+e$. $\Rightarrow \Delta y = a\cdot(\Delta x)^2$

(f) Für positives a ändert sich y vom Scheitelpunkt aus um $+a$, $+4a$, $+9a$ usw. f steigt also mit wachsendem x immer schneller.

(g) Für negatives a ändert sich y vom Scheitelpunkt aus um $-|a|$, $-4|a|$, $-9|a|$ usw. f fällt also mit wachsendem x immer schneller.

(h) Bild.

(i) $f(x) = x^2+px+q$. Vergleich mit $f(x) = a(x-d)^2+e = a(x^2-2dx+d^2)+e = (a)x^2+(-2ad)x+(ad^2+e)$
$\Rightarrow a = 1 \Rightarrow -2d = p \Rightarrow d = -\frac{p}{2} \Rightarrow \frac{p^2}{4} + e = q \Rightarrow e = q - \frac{p^2}{4}$
Insgesamt: $f(x) = (x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}$

$$
\begin{aligned}
0 &= (x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4} && \mid -q + \frac{p^2}{4} \\
\frac{p^2}{4} - q &= (x+\frac{p}{2})^2 && \mid \sqrt{\ldots} \\
\pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} &= x + \frac{p}{2} && \mid -\frac{p}{2} \\
\pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} &= x + \frac{p}{2} && \mid -\frac{p}{2} \\
\pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2} &= x
\end{aligned}
$$

□

1.5 Bestimmen der Funktionsgleichung

Verfahren 1.18

Gegeben: n Informationen zu einer Funktion f

Gesucht: Funktionsgleichung von f

Lösung:

(1) Optional: Skizze machen

(2) Ansatz: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_1 x + a_0$

(3) Interpretieren der Informationen als Punkte. Einsetzen jedes Punktes in die Formel $f(x) = y$

(4) Lösen des entstehenden linearen Gleichungssystems (LGS).

- ⋆ Bei Operator *Bestimmen/Ermitteln*: Mit dem TR
- ⋆ Bei Operator *Berechnen*: Per Hand.

Beispiel 1.19 Ein wütender Vogel wird aus einer Höhe von $40\,\mathrm{m}$ senkrecht in die Luft geworfen. Nach 2 Sekunden fliegt er auf Höhe $44\,\mathrm{m}$, nach 4 Sekunden auf Höhe $8\,\mathrm{m}$. #

Beispiel 1.20 Gesucht ist eine verschobene Normalparabel, die zur senkrechten Geraden $x = 3$ symmetrisch ist und durch den Punkt $(1 \mid 2)$ verläuft.

(1) Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$

(2) Informationen: $a = 1$ (Normalparabel), $(1 \mid 2)$, $(2 \mid d)$, $(4 \mid d)$ (d unbekannt)

(3) Gleichungen:

$$a = 1$$

$$2 = f(1) \iff 2 = a + b + c$$

$$d = f(2) \iff d = 4a + 2b + c$$

$$d = f(4) \iff d = 16a + 4b + c \qquad \text{Gleichsetzen: } 4a + 2b + c = 16a + 4b + c \iff 0 = 12a + 2b$$

LGS mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten.

(4) Mit TR: $a = 1$, $b = -6$, $c = 7$

(5) Insgesamt: $f(x) = x^2 - 6x + 7$

#

2 Die Ableitung

Mit den Methoden der Mittelstufe haben wir folgende mathematische Objekte im Griff:

- Lineare Funktionen (Schnittpunkte, Nullstellen, Steigung)
- Quadratische Funktionen (Scheitelpunkt, Schnittpunkte, Nullstellen, Krümmung)
- Maßzahlen von eckigen Figuren (Umfang, Flächeninhalt, Seitenlängen, Winkel)

Zusätzlich sind wir in der Lage, mit Kreisen zu rechnen. Das funktioniert aber nur über den »Trick«, dass die ominöse Zahl π eingeführt wurde. Wie aber die Berechnung von π funktioniert ist (wahrscheinlich) aktuell noch unklar.
Um Funktionen höheren Grades oder gekrümmte Flächen untersuchen zu können, müssen wir die Endlichkeit hinter uns lassen.

2.1 Der Grenzwert

Definition 2.1 *Man sagt, dass eine* **Zahlenfolge** *einen* **Grenzwert** *hat, wenn sich die Zahlenfolge einer bestimmten Zahl (dem Grenzwert) beliebig genau nähert. Dabei muss die Zahlenfolge den Grenzwert nicht erreichen (sie darf es aber).*
Wir verwenden die Schreibweise $\lim$ *(Limes) für den Grenzwert.*

Beispiel 2.2

(a) Die Zahlenfolge

$$1 \to 1{,}9 \to 1{,}99 \to 1{,}999 \to 1{,}9999 \to \dots$$

hat den Grenzwert 2: Die Folge kommt sich der 2 beliebig nahe. Anders formuliert: Es passt keine Zahl mehr zwischen die Folge und die 2.

(b) Die Zahlenfolge

$$\frac{1}{2} \to \frac{1}{3} \to \frac{1}{4} \to \frac{1}{5} \to \frac{1}{6} \to \dots$$

hat den Grenzwert 0.

(c) Die Zahlenfolge

$$4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to 4 \to \dots$$

hat den Grenzwert 4 (und erreicht diesen Grenzwert auch).

(d) Die Zahlenfolge

$$3 \to 3\frac{1}{2} \to 3 \to 3\frac{1}{3} \to 3 \to 3\frac{1}{4} \to 3 \to \dots$$

hat den Grenzwert 3. Sie erreicht den Grenzwert zwischendurch und verlässt ihn wieder.

(e) Wir betrachten die Zahlenfolge $f(n) = (3 + \frac{1}{n}) * (4 - \frac{1}{n})$, d.h. wir erhalten die einzelnen Zahlen der Folge durch Einsetzen von $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, ...Dies ergibt folgende Zahlenfolge: nf(n) 112 212,25 312,22 412,185 512,16 1012,09 10012,009 100012,000999 nf(n) 112 212,25 312,22 412,185 512,16 1012,09 10012,009 100012,000999 nf(n) 112 212,25 312,22 412,185 512,16 1012,09 10012,009 100012,000999 Es liegt also die Vermutung nahe, dass $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 12$.

#

Wir werden uns im Grundkurs nicht genauer mit Folgen und Grenzwerten auseinandersetzen. Wir wollen aber die wichtigste, fundamentale Idee der Analysis thematisieren:

Verfahren 2.3

Gegeben: Problem, das man exakt nicht ohne Weiteres lösen kann

Gesucht: Exakte Lösung des Problems

Lösung:
(1) Löse das Problem näherungsweise in Abhängigkeit von einer Zahl, die die Genauigkeit angibt
(2) Bilde den Grenzwert
(3) Wenn möglich: Leite aus den Ergebnissen Formeln her, mit denen das Problem exakt gelöst werden kann.

Beispiel 2.4 Wir berechnen den Umfang eines Kreises mit Radius 1. Wir wissen natürlich bereits, dass dieser Umfang $U = 2\pi$ beträgt, aber welche Dezimalzahl verbirgt sich dahinter? Wie kann man die Zahl π berechnen bzw., wie macht das der Taschenrechner?
Wir lösen das Problem zunächst näherungsweise: Wir stellen uns vor, dass wir den gesuchten Umfang U in n gleich große Teile aufteilen. Der Kreisbogen eines solchen Stückes sei $b = \frac{U}{n}$. Wir können b näherungsweise berechnen in 2 Schritten:

(1) Ein beliebiger Punkt P auf dem Kreis hat immer die Koordinaten $P = (\cos(\alpha) \mid \sin(\alpha))$, wobei α der Winkel ist, den der Radius mit der x-Achse einschließt. Der Endpunkt A des ersten Kreisbogens hat den Winkel $\frac{360°}{n}$ und deshalb die Koordinaten $A = (\cos(\frac{360}{n}) \mid \sin(\frac{360}{n}))$.

(2) Es gilt die Näherung $b \approx |AB|$, wobei $B = (1 \mid 0)$. Mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir

$$b \approx |AB| = \sqrt{(\cos(360/n) - 1)^2 + \sin(360/n)^2}$$

und weil b ein n-tel des gesamten Umfangs ist, gilt

$$U = n \cdot b \approx n \cdot \sqrt{(\cos(360/n) - 1)^2 + \sin(360/n)^2}$$

Diese Näherung wird immer genauer, in je mehr gleiche Teile wir den Kreis zerlegen, d.h. es gilt

$$U = \lim_{n \to \infty} n \cdot \sqrt{(\cos(360/n) - 1)^2 + \sin(360/n)^2}$$

Damit können wir $U = 2\pi \approx 6{,}283185307$ näherungsweise berechnen:

n	$n \cdot \sqrt{(\cos(360/n) - 1)^2 + \sin(360/n)^2}$
1	0
10	6,18034
100	6,282151
1000	6,283175
10000	6,283185
100000	6,283185306

#

Definition 2.5 *Formal schreiben wir*

$$\lim_{v \to a} f(v)$$

für den Grenzwert der Funktion f, wenn sich die Variable v der Zahl a nähert.

Beispiel 2.6

(a) Im vorangegangenen Beispiel haben wir gesehen, dass

$$U = \lim_{n \to \infty} n \cdot \sqrt{(\cos(360/n) - 1)^2 + \sin(360/n)^2}$$

(b) Was ist $\lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$? Mit dem TR erhalten wir

h	$\frac{(3+h)^2-9}{h}$
0,1	6,1
0,01	6,01
0,00001	6,00001
0,0000000001	6,00000000001

Also scheint $\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h} = 6$ zu gelten.

#

Bemerkung 2.7 Grenzwerte der Form $\lim_{h\to 0} f(h)$ und $\lim_{n\to\infty} f(n)$ sind für uns am wichtigsten. #

2.2 Tangente und Ableitung

Funktionen dienen dazu, Abhängigkeiten zwischen zwei Größen x und y mathematisch zu erfassen. In vielen Anwendungen geht es anschließend darum, das »optimale« x zu finden.

Beispiel 2.8 Wir betrachten den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit eines Autos ($= x$ in kmh) und dem Benzinverbrauch ($= f(x)$, in Litern) pro gefahrenen $100\,\mathrm{km}$.
$f(70) = 6{,}9$ würde z.B. bedeuten, dass das Auto $6{,}9\,\ell$ verbraucht, wenn es $100\,\mathrm{km}$ weit mit $70\,\mathrm{kmh}$ fährt. $f(30) = 9{,}5$ dagegen heißt, dass es bei $30\,\mathrm{kmh}$ für die gleiche Strecke satte $9{,}5\,\ell$ verbrauchen würde.
Als Autofahrer ist man natürlich daran interessiert, mit der Geschwindigkeit zu fahren, bei der man am wenigsten Benzin verbraucht. Gesucht ist also der Tiefpunkt der Funktion f. #

Im Fall von quadratischen Funktionen können wir diese Problemstellung mit unserem bisherigen Wissen lösen: Es genügt, den Scheitelpunkt von f zu finden.
In den allermeisten Fällen ist die Funktion f aber nicht quadratisch, sondern wesentlich komplizierter. Daher benötigen wir ein neues, allgemeineres Verfahren zur Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten.

Beispiel 2.9 (Fortsetzung von **Beispiel 2.8**) Für den Benzinverbrauch gelte die Formel

$$f(x) = 0{,}000007x^3 - 0{,}0002x^2 - 0{,}1x + 12{,}5$$

#

Die grundlegende Idee kennt jeder, der einmal einen Schokoladen-Hasen oder -Nikolaus auf einem Brot gegessen hat: Wenn man eine gekrümmte Kurve oder Fläche in immer kleinere Stücke zerteilt, werden diese Stücke immer »gerader«. Anders formuliert:

Definition 2.10 *Wenn man an einem bestimmten Punkt $(x \mid f(x))$ auf einer Kurve f immer weiter in die Kurve »hineinzoomt«, ähnelt dieser Ausschnitt der Kurve immer mehr einer Geraden (vgl.* **Abb. 3***).*
Wir bezeichnen die Gerade, die entstehen würde, wenn man unendlich nah heranzoomt, als **Tangente** *an f an der Stelle x (vgl.* **Abb. 4***).*
Die Steigung dieser Tangenten an der Stelle x heißt **Ableitung** *von f an der Stelle x, geschrieben $f'(x)$.*

An **Abb. 4** sieht man nun, dass man die Hoch- und Tiefpunkte einer Funktion daran erkennen kann dass dort die Tangenten waagerecht sind:

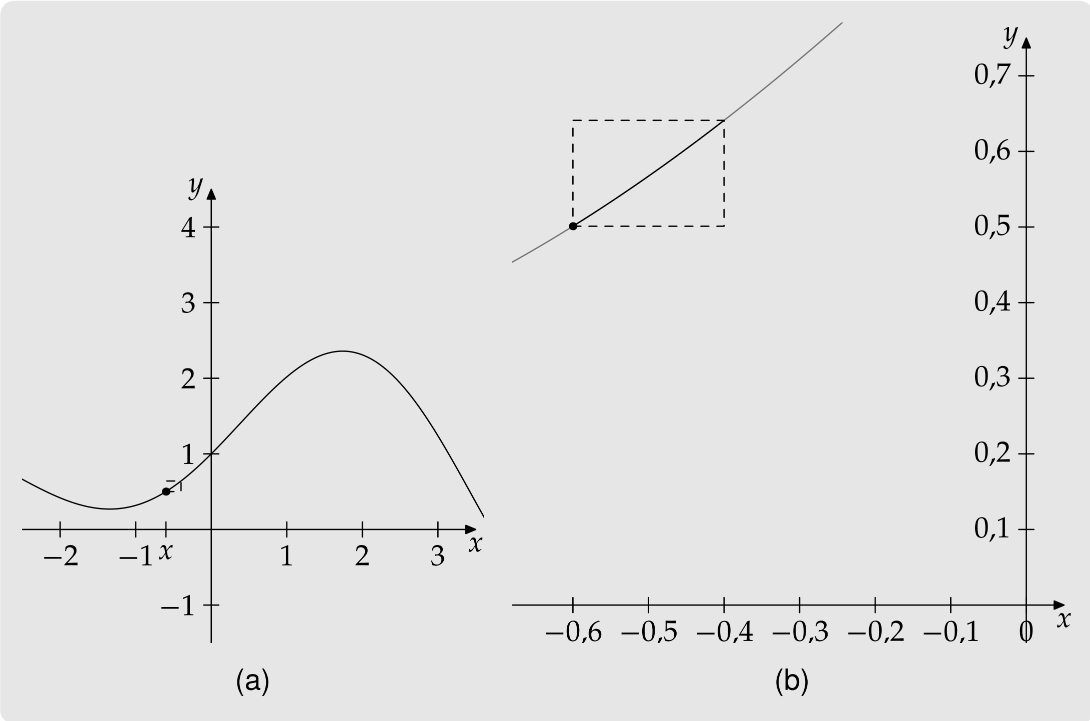


Abbildung 3 Zoomt man an eine Kurve nahe genug heran, so sieht diese immer mehr wie eine Gerade aus. Das rechte Bild zeigt dieselbe Kurve wie im linken Bild, aber in 10-facher Vergrößerung.

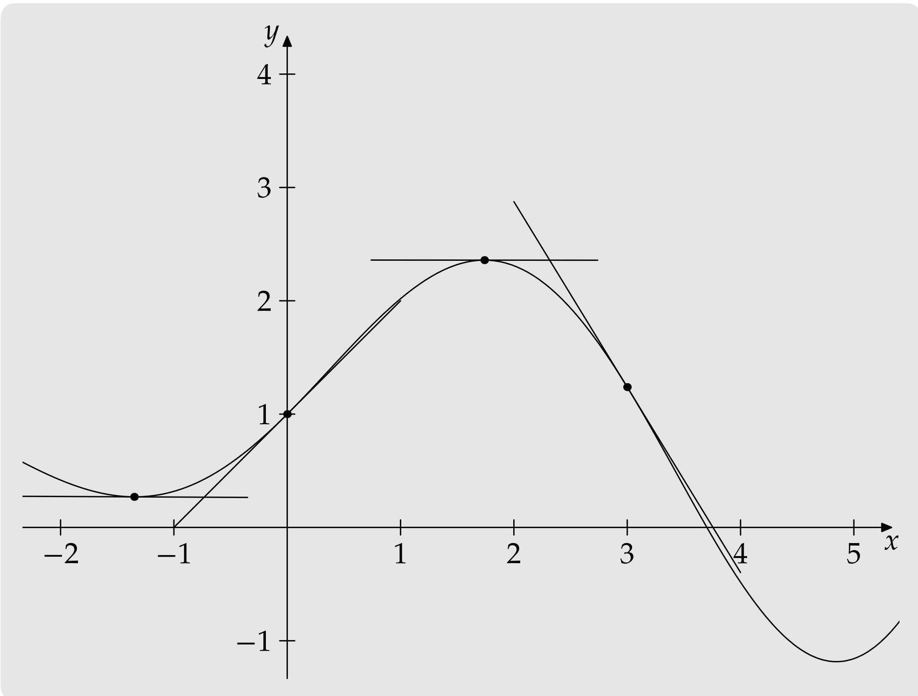


Abbildung 4 Die Tangenten an f an den Stellen $x = -1{,}35$, $x = 0$, $x = 1{,}74$ und $x = 3$

Satz 2.11 Es gilt:[1]

(a) $f'(x) > 0 \iff f$ steigt monoton an der Stelle x

(b) $f'(x) < 0 \iff f$ fällt monoton an der Stelle x

(c) $f'(x) = 0 \iff x$ ist Extremstelle oder Sattelstelle von f

2.3 Der Differentialquotient

Nun geht es darum, die Ableitung $f'(x)$ rechnerisch zu bestimmen. Es gilt

Satz 2.12 Für die Steigung $f'(x)$ der Tangente an der Stelle x gilt die Näherungsformel

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Diese Formel ist umso genauer, je kleiner h ist, d.h.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Der Grenzwert auf der rechten Seite heißt **Differentialquotient**.

Beweis: Bild. Hinweis auf Sattelpunkt. □

Beispiel 2.13 Wir untersuchen die Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ und berechnen $f'(1), f'(3)$ und $f'(-2)$ mit Hilfe des TR:

- $f'(1) \approx \frac{f(1{,}001) - f(1)}{0{,}001} = \frac{0{,}999001001 - 1}{0{,}001} \approx -1$
- $f'(3) \approx \frac{f(3{,}001) - f(3)}{0{,}001} = \frac{11{,}015007 - 11}{0{,}001} \approx 15$
- $f'(-2) \approx \frac{f(-1{,}999) - f(-2)}{0{,}001} = \frac{-13{,}980008 - (-14)}{0{,}001} \approx 20$

Anhand der Ergebnisse sehen wir: An der Stelle -2 steigt f sehr steil, an der Stelle 1 fällt f, an der Stelle 3 steigt f wieder. Zwischen -2 und 1 muss also (mindestens) ein Hochpunkt liegen und zwischen 1 und 3 muss (mindestens) ein Tiefpunkt liegen. #

Beispiel 2.14

(a) $f(x) = 3x$

[1] Dieser Satz ist nicht ganz korrekt.

(b) $f(x) = x^3$

#

2.4 Die Ableitungsregeln

Satz 2.15 Es gelten die folgenden Ableitungsregeln:

(a) $(c)' = 0$, wenn c eine konstante Zahl ist (Konstantenregel)

(b) $(f \pm g)' = f' \pm g'$ (Summenregel)

(c) $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ (Faktorregel)

(d) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ (Potenzregel)

Beweis:

(a) Anschaulich: $f(x) = c$ ist eine konstante Funktion, also eine Gerade, die parallel zur x-Achse ist ($f(x) = 0x + c$). Daher ist die Steigung 0.

Rechnerisch:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

(b) Wir bilden die Ableitung von $k(x) = f(x) + g(x)$:

$$\begin{aligned}
k'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

Für $k(x) = f(x) - g(x)$ funktioniert das genauso.

(c) Anschaulich: Der Graph von f wird mit dem Faktor c gestreckt. Dadurch ver-c-fachen sich alle y-Werte. Also ver-c-facht sich auch jedes Δy und damit ver-c-fachen sich die Steigungen.

Rechnerisch: Wir bilden die Ableitung von $k(x) = c \cdot f(x)$:

$$\begin{aligned}
k'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{k(x+h)-k(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{c\cdot f(x+h)-(c\cdot f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{c\cdot (f(x+h)-f(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} c\cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= c\cdot f'(x)
\end{aligned}$$

(d) Das können wir aktuell nicht formal beweisen. Wir haben aber schon bewiesen, dass $(x)' = 1$, $(x^2)' = 2x$ und $(x^3)' = 3x^2$. Man kann aber zumindest intuitiv erfassen, weshalb der Exponent der Ableitung um 1 kleiner ist als der der Funktion: $f(x) = x^n = x^{n-1}\cdot x + 0$. Wenn f eine lineare Funktion wäre (was es nicht ist), wäre x^{n-1} die Steigung der Funktion.

□

Beispiel 2.16 Mit Hilfe dieser Regeln können wir nun relativ einfach die Ableitung von komplizierteren, zusammengesetzten Funktionen lösen.

(a) $f(x) = x$

(b) $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$

(c) $f(x) = -8x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 6x^3 - 4x^2 + \frac{1}{3}x - 4$

#

2.5 Bestimmung von Extrempunkten

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse noch einmal zusammen:

Satz 2.17 Für eine Funktion f gilt:

(a) $f'(x)$ ist die Steigung von f an der Stelle x.

(b) $f'(x) > 0$ bedeutet, dass f an der Stelle x steigt.

(c) $f'(x) < 0$ bedeutet, dass f an der Stelle x fällt.

(d) $f'(x) = 0$ bedeutet, dass f an der Stelle x einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt hat.

Damit erhalten wir folgenden Satz:

Satz 2.18 Es sei f eine Funktion und $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ seien *alle* Nullstellen der Ableitung. Dann zerfällt der Definitionsbereich von f in Intervalle $I_1 = (-\infty; x_1)$, $I_2 = (x_1; x_2)$, $I_3 = (x_2; x_3)$, ..., $I_n = (x_{n-1}; x_n)$, $I_{n+1} = (x_n; \infty)$. Für jedes dieser Intervalle gilt:
f steigt [fällt] monoton innerhalb des gesamten Intervalls, wenn $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$] für *ein* x aus dem Intervall.

Beweis: □

Beispiel 2.19 (Fortsetzung von **Beispiel 2.9**) Mit den Ableitungregeln kann man nun bequem das Ausgangsproblem lösen: Gesucht war die Geschwindigkeit, für die der Benzinverbrauch minimal ist. Der Benzinverbrauch hängt über die Funktion

$$f(x) = 0{,}000007x^3 - 0{,}0002x^2 - 0{,}1x + 12{,}5$$

von der Geschwindigkeit ab.
Mit den Ableitungsregeln können wir nun die Ableitung von f bestimmen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(0{,}000007x^3 - 0{,}0002x^2 - 0{,}1x + 12{,}5\right)' \\ &= \left(0{,}000007x^3\right)' - \left(0{,}0002x^2\right)' - (0{,}1x)' + (12{,}5)' \\ &= 0{,}000007\left(x^3\right)' - 0{,}0002\left(x^2\right)' - 0{,}1\,(x)' + 0 \\ &= 0{,}000007 \cdot 3 \cdot x^2 - 0{,}0002 \cdot 2 \cdot x - 0{,}1 \cdot 1 \\ &= 0{,}000021x^2 - 0{,}0004x - 0{,}1 \end{aligned}$$

Wir suchen nun alle Stellen, an denen die Steigung 0 ist, das heißt wir lösen die Gleichung $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 0{,}000021x^2 - 0{,}0004x - 0{,}1 &= 0 && |: 0{,}000021 \\ x^2 - \frac{400}{21}x - \frac{10000}{21} &= 0 && |\ p\text{-}q\text{-Formel} \\ x_{1/2} = \frac{200}{21} &\pm \sqrt{\left(\frac{200}{21}\right)^2 + \frac{10000}{21}} \\ x_1 \approx -60{,}14 \qquad & x_2 \approx 79{,}18 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Intervalle $I_1 = (-\infty; -60{,}14)$, $I_2 = (-60{,}14; 79{,}18)$ sowie $I_3 = (79{,}18; \infty)$. Wir untersuchen nun das Monotonieverhalten innerhalb dieser Intervalle:

$$f'(-100) = \frac{3}{20} > 0 \Rightarrow f \text{ steigt links von } x_1$$

$$f'(0) = -0{,}1 < 0 \Rightarrow f \text{ fällt zwischen } x_1 \text{ und } x_2$$

$$f'(100) = 0{,}07 > 0 \Rightarrow f \text{ steigt rechts von } x_2$$

Also muss bei $x_1 = -60{,}14$ ein Hochpunkt liegen und bei $x_2 = 79{,}18$ der Tiefpunkt. Also ist die optimale Geschwindigkeit $79{,}18\,\mathrm{kmh}$. #

Verfahren 2.20

Gegeben: Funktion f

Gesucht: Extrema und Sattelpunkte

Lösung:

(1) Bestimme $f'(x)$

(2) Löse die Gleichung $f'(x) = 0$ (Umstellen, p-q-Formel, Taschenrechner)

(3) Die Lösungen der Gleichung unterteilen die x-Achse in mehrere Intervalle. Wähle für jedes Intervall einen x-Wert a und bestimme $f'(a)$. Das Vorzeichen von $f'(a)$ gibt an, ob f in diesem Intervall steigt oder fällt.

(4) Eine Lösung der Gleichung ist eine

- Hochstelle, wenn f erst steigt und dann fällt,
- Tiefstelle, wenn f erst fällt und dann steigt,
- Sattelstelle in allen anderen Fällen.

(5) Bestimme die y-Koordinaten durch Einsetzen in f.

2.6 Die Tangente an den Graphen

Der Sinn der Differentialrechnung besteht darin, dass selbst komplizierteste Funktionen lokal wie eine Gerade aussehen. In vielen Fällen kann man also komplizierte Funktionen durch ihre Tangente annähern und damit zu Ergebnissen kommen.

Definition 2.21 *Die* **Tangente** *an f an der Stelle $x = a$ ist die Funktion t mit den folgenden Eigenschaften*

(a) t ist eine Gerade, d.h. $t(x) = mx + b$

(b) t hat an der Stelle $x = a$ dieselbe Steigung wie f, d.h. $m = f'(a)$

(c) t hat an der Stelle $x = a$ denselben y-Wert wie f, d.h. $t(a) = f(a)$

Beispiel 2.22 Wir bestimmen die Tangente an $f(x) = -3x^2 - 5x + 1$ a der Stelle $x = -1$:

(a) $t(x) = mx + b$

(b) $f'(x) = -6x - 5 \Rightarrow m = f'(-1) = 1$

(c) $f(-1) = 3 \Rightarrow t(-1) = 3 \iff 1 \cdot (-1) + b = 3 \iff b = 4$

Also ist $t(x) = x + 4$. #

Beispiel 2.23 (Newton-Verfahren) Gesucht ist eine Lösung der Gleichung

$$0{,}3x^4 - x^2 + x = 6$$

Da uns nichts besseres einfällt, erstellen wir zunächst eine Wertetabelle:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	56.8	12.3	-1.2	-1.7	0	0.3	2.8	18.3	64.8

Daran sehen wir, dass eine Lösung zwischen -3 und -2 liegen muss und eine zwischen 2 und 3. Also liegt eine Lösung ungefähr bei $x = 2{,}5$. Um diese Näherung zu verbessern, bestimmen wir die Tangente t an $f(x) = 0{,}3x^4 - x^2 + x$ an der Stelle $x = 2{,}5$:

(a) $t(x) = mx + b$

(b) $f'(x) = 1{,}2x^3 - 2x + 1 \Rightarrow m = f'(2{,}5) = 14{,}75$

(c) $f(2{,}5) = \frac{255}{32} \Rightarrow t(2{,}5) = \frac{255}{32} \iff 14{,}75 \cdot 2{,}5 + b = \frac{255}{32} \Rightarrow b = -\frac{925}{32}$

Also ist $t(x) = 14{,}75x - \frac{925}{32}$. Die Idee besteht nun darin: Statt die Lösung der Gleichung $f(x) = 6$ zu bestimmen (sehr schwierig bzw. quasi unmöglich), bestimmen wir die Lösung von $t(x) = 6$ (sehr einfach):

$$t(x) = 6 \iff 14{,}75x - \frac{925}{32} = 6 \iff x = \frac{1117}{472} \approx 2{,}367$$

Zum Vergleich: Die (auf 9 Nachkommastellen) genaue Lösung ist $x = 2{,}351942516$.

Um die gefundene Lösung zu verbessern, wiederholen wir das Verfahren einfach: Wir bestimmen die Tangente an der Stelle $x = 2{,}367$:

(a) $t(x) = mx + b$

(b) $m = f'(2{,}367) \approx 12{,}18$

(c) $f(2{,}367) \approx 6{,}181 \Rightarrow t(2{,}367) = 6{,}181 \iff 12{,}18 \cdot 2{,}367 + b = 6{,}181 \Rightarrow b \approx -22{,}65$

Also $t(x) = 12{,}18x - 22{,}65$ und damit

$$t(x) = 0 \iff 12{,}18x - 22{,}65 = 0 \iff x \approx 2{,}35214$$

und diese Lösung stimmt auf 3 Stellen hinter dem Komma. Durch weitere Wiederholung des Verfahrens würde man immer genauere Ergebnisse erhalten. #

Verfahren 2.24 Das Newtonverfahren zur Lösung von Gleichungen

Gegeben: Gleichung

Gesucht: em Eine Lösung der Gleichung

Lösung:

(1) Forme Gleichung um in die Form $f(x) = c$, wobei c nicht mehr von x abhängt.

(2) Lege eine Wertetabelle von f an

(3) Finde ein Intervall, in dem eine Lösung liegen muss

(4) Wähle einen Startwert a, der möglichst nahe bei der Lösung liegt

(5) Bestimme die Tangente an der Stelle $x = a$ an f

(6) Bestimme die Lösung $t(x) = c$ als Näherung für die gesuchte Lösung.

(7) Wiederhole das Verfahren (zurück zu Schritt (**5**) mit $a =$ neuer Näherung, falls die Genauigkeit noch nicht reicht).

Bemerkung 2.25 Dieses Verfahren kann der Taschenrechner automatisch durchführen. Dazu gibt man die Gleichung ein und drückt SOLVE. Der TR fragt nach dem Startwert und ermittelt anschließend mit dem Newtonverfahren die Nullstelle.

ACHTUNG: Wenn man das Verfahren mit einem ungünstigen Startwert startet, kann dies den TR minutenlang lahmlegen! #

Beispiel 2.26 Der Jahresgewinn eines Unternehmens wird durch die Funktion

$$g(x) = 0{,}2x^5 - x^4 - 0{,}3x^3 + 6x^2 - 4x - 2$$

beschrieben (x in Jahren seit Gründung, $g(x)$ in Millionen Euro). Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem das Unternehmen die 10 Millionen-Grenze überschreitet. Wir müssen also die Gleichung

$$g(x) = 10 \iff 0{,}2x^5 - x^4 - 0{,}3x^3 + 6x^2 - 4x - 2 = 10$$

lösen. Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	−2	−1.1	2	−0.4999999999999	7.6	90.5	384.4

Wie man sieht, liegt die Lösung zwischen $x = 4$ und $x = 5$ (deutlich näher bei 4). Ein guter Startwert ist also $x = 4$. Der TR liefert $x \approx 4{,}0744$. #

3 Polynome und Gleichungen

Wir haben gesehen, dass viele Problemstellungen in der Analysis durch Gleichungen gelöst werden können. Die Frage nach Extrempunkten reduziert sich z.B. auf das Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$. In diesem Kapitel behandeln wir deshalb verschiedene Methoden zum Lösen von Gleichungen.

3.1 Polynome

Definition 3.1 *Eine Funktion f heißt* **Polynom** *oder* **ganzrationale Funktion**, *wenn man sie in der Form*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ schreiben kann (dies ist die sog. **Normalform** *des Polynoms). Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots a_n$ heißen* **Koeffizienten** *von f. Der höchste vorkommende Exponent heißt* **Grad** *des Polynoms.*

Bemerkung 3.2 Polynome ersten Grades sind genau die linearen Funktionen, Polynome zweiten Grades sind die quadratischen Funktionen. Die Ableitung eines Polynoms vom Grad $n \geq 1$ hat Grad $n-1$. #

Beispiel 3.3 $f(x) = \frac{1}{x}$ ist kein Polynom, $f(x) = 2(x-3)^2$ allerdings schon, denn es gilt $f(x) = 2(x^2 - 6x + 9) = 2x^2 - 12x + 18$, d.h. f ist ein Polynom vom Grad 2. #

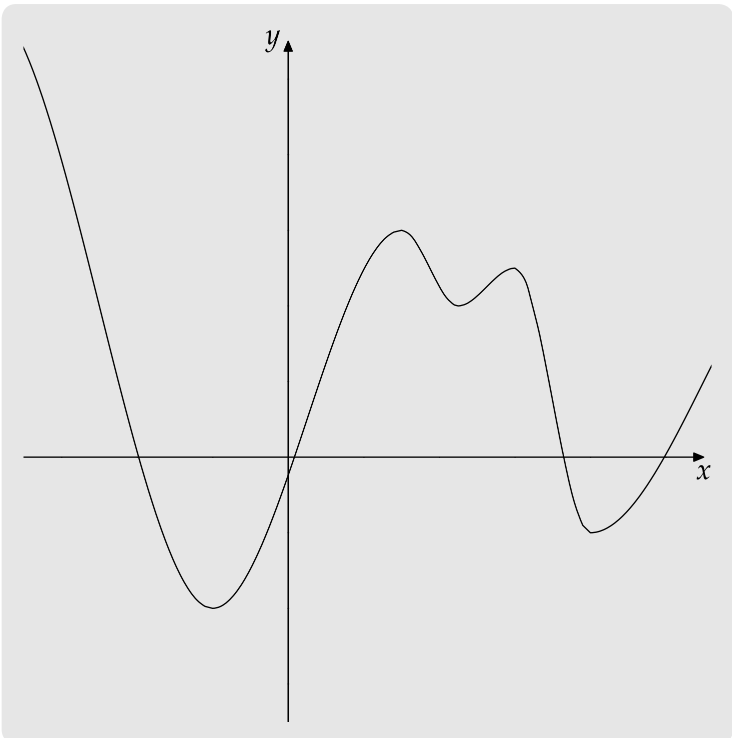


Abbildung 5 Offenbar muss eine Funktion zwischen zwei Nullstellen immer mindestens ein Extremum besitzen.

Satz 3.4 Ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat höchstens n Nullstellen.

Beweis: Zunächst einmal machen wir uns klar, dass eine Funktion zwischen zwei Nullstellen immer mindestens eine Extremstelle haben muss (vgl. **Abb. 5**).
Es sei nun $n \geq$ der Grad des Polynoms f. Wir arbeiten uns systematisch durch alle Möglichkeiten hindurch:

1. Fall: $n = 1$ In diesem Fall ist f eine lineare Funktion. Diese hat offenbar höchstens eine Nullstelle.

2. Fall: $n = 2$ In diesem Fall ist $f'(x)$ ein Polynom 1. Grades, also hat $f'(x)$ höchstens 1 Nullstelle. Daher kann f höchstens eine Extremstelle haben. Daher kann f höchstens 2 Nullstellen haben (weil es sonst mehr als eine Extremstelle gäbe).

3. Fall: $n = 3$ Hier kann man genauso argumentieren: $f'(x)$ hat Grad 2 und kann deshalb (siehe oben) höchstens 2 Nullstellen haben. Daher kann f höchstens 2 Extremstelle haben. Daher kann f höchstens 3 Nullstellen haben.

Diese Argumentation kann man nun für $n = 4, n = 5, n = 6$ usw. fortsetzen und erhält so nacheinander alle Möglichkeiten für n. □

Dieser Satz hat weitreichende Konsequenzen:

Satz 3.5 Ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat höchstens

(a) n Nullstellen

(b) $n - 1$ Extrempunkte

Beweis:

(a) Das haben wir eben bewiesen.

(b) $f'(x)$ ist ein Polynom vom Grad $n - 1$ und hat deshalb höchstens $n - 1$ Nullstellen, d.h. es gibt höchstens $n - 1$ Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$. Daher hat f höchstens $n - 1$ Extrempunkte.

□

3.2 Gleichungen bis Grad 2

Sofern der Grad des Polynoms 1 oder 2 ist, kann die Gleichung mit den Verfahren aus der Mittelstufe gelöst werden:

(a) Lineare Gleichungen löst man durch »Umstellen nach x«.

(b) Quadratische Gleichungen löst man durch:

(1) Umformen auf die Form $x^2 + px + q = 0$

(2) Anwendung der p-q-Formel: $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

3.3 Produktgleichungen

Satz 3.6 Die Lösungen der Gleichung $f(x) \cdot g(x) \cdot \ldots h(x) = 0$ sind genau die Lösungen der (einfacheren) Gleichungen

$$f(x) = 0 \qquad g(x) = 0 \qquad \ldots \qquad h(x) = 0$$

Beweis: Ein Produkt ist genau dann 0, wenn (mindestens) einer der Faktoren 0 ist. □

Beispiel 3.7 Berechnen Sie die Nullstellen von $f(x) = 5(x-4)(x^2 - 4x + 3)$.

$$5(x-4)(x^2 - 4x + 6) = 0$$

$$\begin{array}{lllll} 5 = 0 ↯ & \text{oder} & x - 4 = 0 & \text{oder} & x^2 - 4x + 6 = 0 \\ & & x_1 = 4 & & x^2 - 4x + 3 = 0 \\ & & & & x_{2/3} = 2 \pm \sqrt{4-3} \\ & & & & x_{2/3} = 2 \pm 1 \\ & & & & x_2 = 3;\ x_3 = 1 \end{array}$$

Insgesamt erhalten wir also 3 Nullstellen $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ und $x_3 = 1$. #

Beispiel 3.8 #

3.4 Reine Potenzgleichungen

Am einfachsten ist der Fall, wenn nur eine einzige Potenz von x in der Gleichung vorkommt:

Verfahren 3.9

Gegeben: Gleichung $ax^n + b = 0$

Gesucht: Lösungen der Gleichung

Lösung: (1) Löse die Gleichung nach x^n auf.

(2) Ziehe die n-te Wurzel. Beachte dabei:

- Wenn n gerade ist, kann man die n-te Wurzel nur aus nicht-negativen Zahlen ziehen. Es gibt immer zwei Lösungen ($\pm$).
- Wenn n ungerade ist, gibt es genau eine Lösung.

Beispiel 3.10 Wir lösen die Gleichung $2x^5 - 5 = 6x^5 + 3$:

$$\begin{aligned} 2x^5 - 5 &= 6x^5 + 3 \mid -2x^5 - 3 \\ -8 &= 4x^5 \qquad \mid : 4 \\ -2 &= x^5 \qquad \mid \sqrt[5]{} \\ -1{,}148698355 &\approx x \end{aligned}$$

#

Beispiel 3.11 Wir lösen die Gleichung $3x^8 + 5 = 20$:

$$\begin{aligned} 3x^8 + 5 &= 20 \qquad \mid -5 \\ 3x^8 &= 15 \qquad \mid : 3 \\ x^8 &= 5 \qquad \mid \sqrt[8]{} \\ x &\approx 1{,}222844545 \end{aligned}$$

#

Beispiel 3.12 Wir lösen die Gleichung $x^4 + 2 = 1$:

$$\begin{aligned} x^4 + 2 &= 1 \qquad \mid -2 \\ x^4 &= -1 \qquad \mid \sqrt[4]{} \\ x &= \sqrt[4]{-1} \ \lightning \end{aligned}$$

Also hat die Gleichung keine Lösung. #

3.5 Biquadratische Gleichungen

Manche Gleichungen kann man dadrch drastisch vereinfachen, dass man eine bestimmte Potenz von x durch eine neue Variable z »substituiert« (d.h. »ersetzt«):

Verfahren 3.13

Gegeben:	Gleichung der Form $ax^4 + bx^2 + c = 0$
Gesucht:	Lösungen der Gleichung
Lösung:	(1) Substituiere $z = x^2$
	(2) Neue Gleichung: $az^2 + bz + c = 0$
	(3) Lösen mit p-q-Formel $\Rightarrow$ Lösungen z_1, z_2
	(4) Resubstituieren:
	• $z_1 = x^2 \Rightarrow x_{1/2}$
	• $z_2 = x^2 \Rightarrow x_{3/4}$

Beispiel 3.14 Berechne die Nullstellen von $f(x) = -60x^4 + 1560x^2 - 1500$.

$$\begin{aligned}
0 &= f(x) \\
0 &= -60x^4 + 1560x^2 - 1500 && \mid z = x^2 \\
0 &= -60z^2 + 1560z - 1500 && \mid: (-60) \\
0 &= z^2 - 26z + 25 && \mid p\text{-}q\text{-Formel} \\
z_{1/2} &= 13 \pm \sqrt{13^2 - 25} = 13 \pm 12 \\
z_1 &= 25 \qquad z_2 = 1 && z = x^2 \\
x^2 &= 25 \qquad x^2 = 1 && \sqrt{} \\
x_{1/2} &= \pm 5 \qquad x_{3/4} = \pm 1
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also die Nullstellen $x_1 = 5, x_2 = -5, x_3 = 1, x_4 = -1$. #

Bemerkung 3.15 Das Verfahren klappt nicht nur bei biquadratischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 &= 2x^6 + 38x^3 - 432 && \mid z = x^3 \\
0 &= 2z^2 + 38z - 432 && \mid: (-60) \\
0 &= z^2 + 19z - 216 && \mid p\text{-}q\text{-Formel} \\
z_{1/2} &= -9{,}5 \pm \sqrt{9{,}5^2 + 216} = -9{,}5 \pm 17{,}5 \\
z_1 &= 8 \qquad z_2 = -27 && z = x^3 \\
x^3 &= 8 \qquad x^3 = -27 && \sqrt[3]{} \\
x_1 &= 2 \qquad x_2 = -3
\end{aligned}$$

#

4 Krümmung und zweite Ableitung

Mit Hilfe der Ableitung können wir nun bereits relativ komfortabel Funktionen untersuchen, z.B. auf Hoch- und Tiefpunkte. Die Situation ist aber noch nicht ganz zufriedenstellend, wie das nächste Beispiel zeigt:

Beispiel 4.1 Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{6}x^6 - x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 17{,}5x^2 + 30x - 7$$

auf Hoch- und Tiefpunkte. Es gilt

$$f'(x) = x^5 - 5x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 35x + 30$$

Gesucht sind also die Lösungen der Gleichung

$$f'(x) = 0 \iff x^5 - 5x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 35x + 30 = 0$$

Eine solche Gleichung kann beispielsweise mit dem Newtonverfahren gelöst werden, aber das ist sehr aufwändig. Hinzu kommt, dass wir nicht wissen, wie viele Lösungen die Gleichung überhaupt hat. Durch Ausprobieren (z.B. durch eine Wertetabelle) kann man jedoch herausfinden, dass $x = 2$ eine Lösung ist, denn

$$f(2) = 2^5 - 5 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 - 35 \cdot 2 + 30 = 32 - 5 \cdot 16 + 8 \cdot 8 + 6 \cdot 4 - 70 + 30 = 32 - 80 + 64 + 24 - 70 + 30$$

Um aber untersuchen zu können, welche Art Extremum bei $x = 2$ vorliegt, bräuchten wir *alle* anderen Lösungen der Gleichung. #

Ein wichtiges Ziel dieses Kapitels ist also, ein Kriterium zu finden, anhand dessen man entscheiden kann, ob an einem Punkt mit Steigung 0 ein Tief- oder ein Hochpunkt vorliegt, und zwar ohne Kenntnis der anderen möglichen Extremstellen.

4.1 Die zweite Ableitung

Die Idee ist, sich die Krümmung der Funktion an der Extremstelle anzuschauen. Es gilt:

Satz 4.2 $x = a$ ist eine Tiefstelle [bzw. Hochstelle] von $f(x)$, wenn

(a) die Steigung bei $x = a$ gleich 0 ist, d.h. $f'(a) = 0$ *und*

(b) die Kurve bei $x = a$ linksgekrümmt [bzw. rechtsgekrümmt] ist.

Wir benötigen also ein Werkzeug, mit dem wir die Krümmung einer Funktion berechnen können.

Definition 4.3 *Die Ableitung der Ableitung einer Funktion $f(x)$ heißt* **zweite Ableitung** *von f, geschrieben $f''(x)$. D.h.*

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$$

Beispiel 4.4

(a) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x + 1$

$$\Rightarrow f'(x) = 15x^2 - 6x + 7 \Rightarrow f''(x) = 30x - 6$$

(b) $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x + 4 \Rightarrow f''(x) = 4$$

(c) $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow f''(x) = 0$$

#

Der Schlüssel zur »normalen« Ableitung stellte die Tangente dar, also die lineare Funktion $t(x) = mx + b$, die die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ möglichst gut annähert. Lineare Funktionen haben nämlich den Vorteil, dass ihre Steigung seit der Mittelstufe bekannt ist, es gilt $f'(x) = m$. Die Bedingungen an die Tangente an der Stelle $x = x_0$ lauteten deshalb:

(1) $t(x) = mx + b$

(2) $t'(x_0) = f'(x_0)$

(3) $t(x_0) = f(x_0)$

Dieses Prinzip lässt sich problemlos auf Parabeln fortsetzen:

Definition 4.5 *Die Parabel $p(x) = ax^2 + bx + c$ heißt* **Schmiegeparabel** *an $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(1) $p(x) = ax^2 + bx + c$

(2) $p''(x_0) = f''(x_0)$

(3) $p'(x_0) = f'(x_0)$

(4) $p(x_0) = f(x_0)$

Beispiel 4.6 Es sei $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 10x - 7 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 8x + 10 \Rightarrow f''(x) = 36x^2 - 48x - 8$.
Wir berechnen die Schmiegeparabel an der Stelle $x = 1$:

(1) $p(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow p'(x) = 2ax + b \Rightarrow p''(x) = 2a$

(2) $p''(1) = f''(1) \iff 2a = 36 - 48 - 8 \iff 2a = -20 \iff a = -10$

(3) $p'(1) = f'(1) \iff -20 \cdot 1 + b = 12 - 24 - 8 + 10 \iff 1 + b = -10 \iff b = -11$

(4) $p(1) = f(1) \iff -10 \cdot 1 - 11 \cdot 1 + c = 3 - 8 - 4 + 10 - 7 \iff c - 10 = -6 \iff c = 4$

Insgesamt folgt $p(x) = -10x^2 - 11x + 4$. #

Satz 4.7 Die zweite Ableitung $f''(x_0)$ hängt folgendermaßen mit der Krümmung zusammen:

(a) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ ist bei $x = x_0$ linksgekrümmt

(b) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ ist bei $x = x_0$ rechtsgekrümmt

(c) Je größer der Betrag von $f''(x_0)$, desto stärker ist f an der Stelle $x = x_0$ gekrümmt.

Beweis: Es sei $p(x) = ax^2 + bx + c$ die Schmiegeparabel an $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$. Nach Definition gilt

$$f''(x_0) = p''(x_0) = 2a$$

Wenn $f''(x_0) > 0$ ist, so folgt $2a > 0 \iff a > 0$, d.h., die Schmiegeparabel ist nach oben geöffnet bzw. linksgekrümmt. Wenn $f''(x_0) < 0$, so folgt $2a < 0 \iff a < 0$, d.h., die Schmiegeparabel ist nach unten geöffnet bzw. rechtsgekrümmt.
Außerdem gilt für jede Parabel: Je größer der Betrag von a, desto stärker ist die Parabel gekrümmt.
□

Damit erhalten wir das folgende Kriterium für Extrempunkte:

Satz 4.8 Es gilt:

(a) $f'(x) = 0, f''(x) > 0 \Rightarrow x$ ist Tiefstelle

(b) $f'(x) = 0, f''(x) < 0 \Rightarrow x$ ist Hochstelle

(c) $f'(x) = 0, f''(x) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich

Beweis: Wenn $f'(x) = 0$, dann liegt bei x eine Hoch-, Tief- oder Sattelstelle vor. Ist zusätzlich $f'(x) > 0$, so ist $f(x)$ linksgekrümmt (die Schmiegeparabel ist nach oben geöffnet) und damit liegt ein Tiefpunkt vor. Ist andererseits $f''(x) < 0$, so ist $f(x)$ rechtsgekrümmt und es liegt ein Hochpunkt vor. Im Fall $f''(x) = 0$ kann alles vorliegen: Hoch-, Tief- oder Sattelstelle. In diesem Fall muss man mit dem Vorzeichen-Wechselkriterium arbeiten. □

Beispiel 4.9 Gesucht sind die Extrema von $f(x) = 0{,}5x^3 - x^2 - 1{,}5x - 4$. Es gilt $f'(x) = 1{,}5x^2 - 2x - 1{,}5$ und $f''(x) = 3x - 2$ Die Kandidaten für Extremstellen erhalten wir durch

$$f'(x) = 0 \iff 1{,}5x^2 - 2x - 1{,}5 = 0 \iff x^2 - \frac{4}{3}x - 1 = 0 \iff x_1 \approx 1{,}8685 \text{ und } x_2 = -0{,}53518$$

Wegen $f''(1{,}8685) \approx 3{,}306 > 0$ ist $x_1 \approx 1{,}8685$ eine Tiefstelle und wegen $f''(-0{,}53518) \approx -3{,}306 < 0$ ist $x_2 \approx -0{,}53518$ eine Hochstelle. #

4.2 Wendepunkte

Nun, da wir die Krümmung einer Funktion berechnen können, ist es möglich, die Punkte zu berechnen, an denen die Krümmung ihre Art ändert:

Definition 4.10 *Eine Stelle $x = a$ heißt* **Wendestelle** *einer Funktion $f(x)$, wenn der Graph von f an der Stelle $x = a$ von einer Links- in eine Rechtskrümmung übergeht oder anders herum.*

Satz 4.11 Es gilt

$$x \text{ ist Wendestelle von } f \Rightarrow f''(x) = 0$$

Beweis: Wenn x eine Wendestelle ist, wechselt die Krümmung von links nach rechts oder anders herum. D.h., die Krümmung wechselt ihr Vorzeichen an der Stelle x. Da die Krümmung der zweiten Ableitung entspricht, wechselt diese ihr Vorzeichen an der Stelle x, muss also an der Stelle x gleich 0 sein. □

Der vorangegangene Satz liefert nur ein »notwendiges« Kriterium für Wendepunkte. Genau wie bei möglichen Extrempunkten muss man auch hier die Kandidaten noch einmal untersuchen, ob tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt.

Beispiel 4.12 Bestimme die Wendepunkte von $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 7x + 1$. #

4.3 Wendepunkte im Sachzusammenhang

Um die Bedeutung von Wendepunkten in Sachzusammenhängen verstehen zu können, ist folgender Zusammenhang wichtig:

Satz 4.13 Die Wendestellen einer Funktion $f(x)$ sind genau die Extremstellen der Funktion $f'(x)$.

Beweis: Sei $g(x) = f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$. Die Wendepunkte von f erfüllen die Gleichung $f''(x) = 0$, die Extrempunkte von g die Gleichung $g'(x) = 0$. Wegen $g'(x) = f''(x)$ sind diese Gleichungen äquivalent. □

Beispiel 4.14 #

Des Weiteren erhalten wir ein weiteres Kriterium für Wendepunkte:

Satz 4.15 Es gilt

$$f''(x) = 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0 \Rightarrow x \text{ ist Wendestelle von } f$$

Beweis: □

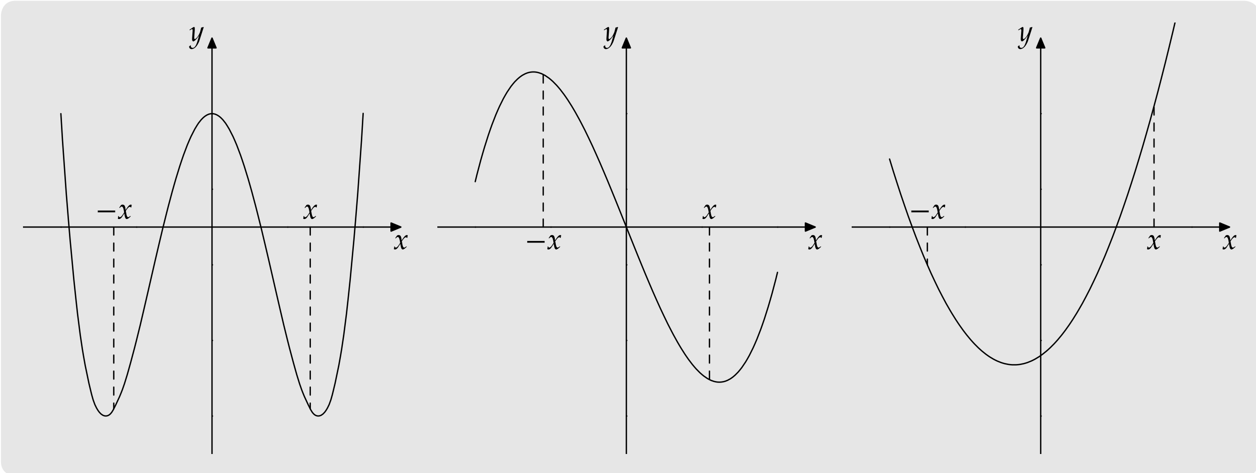


Abbildung 6 Eine achsensymmetrische, eine punktsymmetrische und eine unsymmetrische Funktion.

5 Kurvendiskussion

In diesem Kapitel tragen wir alle bisherigen Erkenntnisse bezüglich der Untersuchung von Funktionen zusammen. Ziel ist die vollständige Untersuchung einer Funktion.

5.1 Symmetrie

Wenn ein Funktionsgraph eine Symmetrie aufweist, kann man sich bei der weiteren Untersuchung »eine Hälfte« des Definitionsbereiches sparen: Wenn f symmetrisch zur y-Achse ist und einen Hochpunkt bei $(3 \mid 5)$ hat, dann ist klar, dass bei $(-3 \mid 5)$ ein weiterer Hochpunkt liegen muss.

Satz 5.1 Der Graph einer Funktion f ...

(a) ... ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn $f(-x) = f(x)$;

(b) ... ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung $(0 \mid 0)$, wenn $f(-x) = -f(x)$.

Beweis: Vergleiche **Abb. 6**. □

Beispiel 5.2

(a) Die Funktion $f(x) = 7(x^3 - 3)(x^3 + 3) - 3x^2 + 2$ ist achsensymmetrisch: Sei $x \in \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(-x) &= 7((-x)^3 - 3)((-x)^3 + 3) - 3(-x)^2 + 2 \\ &= 7(-x^3 - 3)(-x^3 + 3) - 3x^2 + 2 \\ &= 7 \cdot (-1)(x^3 + 3)(-1)(x^3 - 3) - 3x^2 + 2 \\ &= 7(x^3 + 3)(x^3 - 3) - 3x^2 + 2 = f(x) \end{aligned}$$

(b) Die Funktion $f(x) = x^5 - 3x^3 + x$ ist punktsymmetrisch: Sei $x \in \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ beliebig, aber fest. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 - 3(-x)^3 + (-x) \\ &= -x^5 + 3x^3 - x \\ &= -(x^5 - 3x^3 + 1) = -f(x) \end{aligned}$$

#

Einigen Funktionen kann man direkt ansehen, dass sie eine Symmetrie aufweisen:

Satz 5.3 Für ein *Polynom f in Normalform* gilt:

(a) f ist achsensymmetrisch $\iff$ f hat keine ungeraden Exponenten

(b) f ist punktsymmetrisch $\iff$ f hat keine geraden Exponenten (Achtung: $x^0 = 1$ hat einen geraden Exponenten)

Beweis: Exemplarisch für einige Funktionen. □

Beispiel 5.4 Das Polynom $f(x) = 2x^6 - 3x^4 + 2$ ist also achsensymmetrisch, das Polynom $f(x) = -3x^7 - \frac{2}{3}x^5 - x$ punktsymmetrisch und $f(x) = x^3 + 1$ ist unsymmetrisch.
Beachte, dass der Satz nur für *Polynome in Normalform* gilt, z.B. ist $f(x) = (x-1)^3 + x$ unsymmetrisch, obwohl nur ungerade Exponenten vorkommen und $f(x) = \frac{x^7}{x^3}$ ist achsensymmetrisch, da $f(x) = x^4$.

#

5.2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Definition 5.5 *Die y-Koordinate des Schnittpunktes einer Funktion f mit der y-Achse heißt* **y-Achsenabschnitt** *von f.*
Die x-Koordinate eines Schnittpunktes mit der x-Achse heißt **Nullstelle** *von f.*

Satz 5.6

(1) Der y-Achsenabschnitt von f ist $y = f(0)$.

(2) Die Nullstellen von f sind die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$.

5.3 Extrema und Sattelpunkte

Hier noch einmal die wichtigsten Ergebnisse zu Extrempunkten:

Satz 5.7

(1) x ist Extrem- oder Sattelstelle $\Leftrightarrow f'(x) = 0$

(2) $f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0 \Rightarrow x$ ist Tiefstelle

(3) $f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0 \Rightarrow x$ ist Hochstelle

(4) $f'(x) = 0$ und f' wechselt das Vorzeichen bei x von $-$ nach $+$ $\Rightarrow x$ ist Tiefstelle

(5) $f'(x) = 0$ und f' wechselt das Vorzeichen bei x von $+$ nach $-$ $\Rightarrow x$ ist Hochstelle

(6) $f'(x) = 0$ und f' wechselt das Vorzeichen bei x *nicht* $\Rightarrow x$ ist Sattelstelle

5.4 Wendepunkte

Die Bestimmung von Wendestellen lässt sich direkt auf die Bestimmung von Extremstellen zurückführen. Daher erhalten wir

Satz 5.8

(1) x ist Wendestelle von $f \Rightarrow f''(x) = 0$

(2) $f'(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0 \Rightarrow x$ ist Wendestelle von f.

Außerdem gilt der folgende Zusammenhang zu den Sattelpunkten einer Funktion:

Satz 5.9 Die Wendestellen mit $f'(x) = 0$ sind genau die Sattelstellen von f.

Genauer:

(a) Gilt $f''(x) = 0$ und $f'''(x) > 0$, dann ist die Steigung von f an der Stelle x minimal.

(b) Gilt $f''(x) = 0$ und $f'''(x) < 0$, dann ist die Steigung von f an der Stelle x minimal.

5.5 Zeichnen des Funktionsgraphen

Beim Zeichnen des Funktionsgraphen geht man normalerweise folgendermaßen vor:

(1) Eintragen aller errechneter besonderer Punkte.

(2) Bestimmung weiterer Punkte durch Einsetzen, wenn nötig.

(3) Skizzieren des Graphen unter Beachtung der Krümmung (wechselt an den Wendepunkten).

6 Exponentialfunktion und Logarithmus

6.1 Die Potenzgesetze

Zur Wiederholung hier die aus der Mittelstufe bekannten Potenzgesetze:

Satz 6.1 Im Term a^x (»a hoch x«) heißt a **Basis** und x **Exponent**. Es gelten die folgenden Potenzgesetze:

(a) $a^0 = 1$ für $a \neq 0$

(b) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}$ für $n \in \mathbb{N}$

(c) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(d) $a^x : a^y = a^{x-y}$

(e) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

(f) $(a^x)^y = a^{xy}$

(g) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

(h) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ für $a \geq 0$

6.2 Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen treten immer dann auf, wenn ein Wert wiederholt mit demselben Faktor a multipliziert wird:

Definition 6.2 *Eine Funktion $f(x)$ heißt* **Exponentialfunktion***, wenn*

$$f(x) = b \cdot a^x$$

wobei der **Startwert** *b beliebig sein kann und der* **Wachstumsfaktor** *$a > 0$.*

Beispiel 6.3 Ein Kapital von $100\,€$ wird für $1\,\%$ Zinsen angelegt. Nach einem Jahr ist es dadurch auf $101\,€$ gewachsen. Nach dem nächsten Jahr sind es dann schon $102{,}01\,€$, da die Zinsen mitverzinst werden. Im wieder nächsten Jahr ergeben sich $103{,}0301\,€$ usw.
Da das Kapital in jedem Jahr um $1\,\%$ *wächst*, kommt $1\,\%$ zu den $100\,\%$ *hinzu*. Das Kapital wächst also auf das $101\,\%$-fache, d.h. auf das $1{,}1$-fache. Dadurch ergibt sich die folgende Wertetabelle, wobei $k(x)$ das Kapital nach x Jahren darstellt:

x	0	1	2	3	4	5
$k(x)$	100	$100 \cdot 1{,}01$	$100 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}01 = 100 \cdot 1{,}01^2$	$100 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}01 = 100 \cdot 1{,}01^3$	$100 \cdot 1{,}01^4$	$100 \cdot 1{,}01^5$

Nach x Jahren beträgt das Kapital also $k(x) = 100 \cdot 1{,}01^x$. Also ist $k(x)$ eine Exponentialfunktion mit Startwert $b = 100$ und Wachstumsfaktor $a = 1{,}01$. #

Beispiel 6.4 Die Bevölkerung eines Landes mit 23 Millionen Einwohnern geht zurück und schrumpft jedes Jahr um 3 %. Der Startwert ist 23 und der Wachstumsfaktor $(100 - 3)\,\% = 97\,\% = 0{,}97$. Die Funktionsgleichung lautet also

$$b(x) = 23 \cdot 0{,}97^x$$

wobei $b(x)$ die Bevölkerung nach x Jahren ist (in Millionen). Es gilt also beispielsweise $b(10) = 16{,}96$, d.h. nach 10 Jahren ist die Bevölkerung auf knapp 17 Millionen Personen geschrumpft. #

In vielen Fällen ist der Wachstumsfaktor nicht direkt gegeben:

Beispiel 6.5 Eine Bakterienkultur wächst exponentiell besteht bei Beobachtungsbeginn aus 50 Bakterien. 10 Tage später sind es bereits 30 Millionen Bakterien. Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion $b(x)$, die die Anzahl Bakterien nach x Tagen beschreibt. Geben Sie weiterhin an, um wie viel Prozent die Bakterienkultur pro Tag wächst.
Da es sich um eine Exponentialfunktion handelt, gilt $b(x) = 50 \cdot a^x$ mit unbekanntem Wachstumsfaktor a. Durch Einsetzen der Information $b(10) = 30.000.000$ erhalten wir

$$\begin{aligned} b(10) &= 30.000.000 & \\ 50 \cdot a^{10} &= 30.000.000 & &|: 50 \\ a^{10} &= 600.000 & &|\ \sqrt[10]{} \\ a &= \sqrt[10]{600.000} \approx 3{,}783 & \end{aligned}$$

Also gilt $b(x) = 50 \cdot 3{,}783^x$. Das prozentuale Wachstum pro Tag beträgt $(378{,}3 - 100)\,\% = 278{,}3\,\%$. Die Bakterienkultur verdreifacht sich also fast jeden Tag! #

6.3 Der Logarithmus

Exponentialfunktionen führen unmittelbar zu Gleichungen, bei denen die gesuchte Größe x im Exponenten steht:

Beispiel 6.6 (Fortsetzung von **Bsp. 6.4**) Wie lange wird es dauern, bis die Bevölkerung unter 10 Millionen gesunken ist, wenn sie weiterhin jährlich um 3 % abnimmmt?

$$\begin{aligned} & b(x) &= 10 & \\ \Longleftrightarrow\ & 23 \cdot 0{,}97^x &= 10 & \quad |: 23 \\ \Longleftrightarrow\ & 0{,}97^x &= 0{,}435 & \end{aligned}$$

Der Trick besteht nun darin, die beiden Zahlen $0{,}97$ und $0{,}435$ als Zehner-Potenzen zu schreiben:

$$0{,}97 \approx 10^{-0{,}01323} \qquad \text{und} \qquad 0{,}435 \approx 10^{-0{,}3615}$$

Damit kann man die Gleichung folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow\ & 0{,}97^x &&= 0{,}435 \\
\Longleftrightarrow\ & \left(10^{-0{,}01323}\right)^x &&= 10^{-0{,}3615} \\
\Longleftrightarrow\ & 10^{-0{,}01323x} &&= 10^{-0{,}3615} \\
\Longleftrightarrow\ & -0{,}01323x &&= -0{,}3615 \qquad |: (-0{,}01323) \\
\Longleftrightarrow\ & x &&= 27{,}32
\end{aligned}$$

Im 28-ten Jahr wird die Bevölkerung also unter 10 Millionen sinken. #

Der Schlüssel liegt also darin, eine beliebige positive Zahl als Zehner-Potenz schreiben zu können:

Definition 6.7 *Der* **(Zehner-)Logarithmus** *von $a > 0$ ist die Zahl ℓ, mit der man 10 potenzieren muss, um a zu erhalten, d.h.*

$$a = 10^\ell$$

Man schreibt für diese Zahl kurz $\log(a)$.

Beispiel 6.8

(a) $\log(1000) = 3$, denn $10 \approx 10^3$

(b) $\log(100) = 2$, denn $10 \approx 10^2$

(c) $\log(10) = 1$, denn $10 \approx 10^1$

(d) $\log(0{,}1) = -1$, denn $0{,}1 \approx 10^{-1}$

#

Bemerkung 6.9 Der Logarithmus einer Zahl entspricht ungefähr der Anzahl der Stellen der Zahl minus 1. D.h. $\log(1343)$ liegt zwischen 3 und 4 (aber deutlich näher bei 3) und $\log(837.648.565.453)$ liegt zwischen 11 und 12 (näher bei der 12).
Daraus folgt, dass der Logarithmus unglaublich langsam wächst: Man muss schon $1.000.000$ Schritte auf der x-Achse gehen, um bei $y = 6$ anzukommen! #

6.4 Rechnen mit Logarithmen

Mit Hilfe des Logarithmus kann man nun Gleichungen im Zusammenhang mit Exponentialfunktionen lösen:

Beispiel 6.10

$$\begin{aligned} & 3 \cdot 4^x &&= 375 && \mid: 3 \\ \iff\ & 4^x &&= 125 && \mid \log(4) = 0{,}602,\ \log(125) = 2{,}097 \\ \iff\ & 10^{0{,}602x} &&= 10^{2{,}097} && \\ \iff\ & 0{,}602x &&= 2{,}097 && \mid: 0{,}602 \\ \iff\ & x &&= 3{,}48 && \end{aligned}$$

#

Etwas einfacher wird es noch durch die Verwendung des folgenden Rechengesetzes für Logarithmen:

Satz 6.11

$$\log(a^x) = x \cdot \log(a)$$

Beweis: Übung! Schreibe zunächst $a = 10^\ell$ und berechne daraus $a^x = 10^{\cdots}$. □

Beispiel 6.12

$$\begin{aligned} & 7 \cdot 11^x &&= 8403 && \mid: 7 \\ \iff\ & 11^x &&= 1200{,}428 && \mid \log(\ ) \\ \iff\ & x \cdot \log(11) &&= \log(1200{,}428) && \mid: \log(11) \\ \iff\ & x &&= \frac{\log(1200{,}428)}{\log(11)} && \\ \iff\ & x &&= 2{,}96 && \end{aligned}$$

#

6.5 Numerische Berechnung des Logarithmus

Obwohl es für uns prinzipiell unerheblich ist, wie man den Logarithmus einer Zahl berechnen kann (das erledigt der Taschenrechner), soll das Prinzip angedeutet werden. Dazu benötigen wir folgenden Satz:

Satz 6.13 Für jede Zahl c zwischen 1 und 10 gilt:

$$\sqrt[100]{c} \approx 1$$

Beweis: Es gilt $\sqrt[100]{1} = 1$ und $\sqrt[100]{10} \approx 1{,}0233$. Alle Zahlen dazwischen müssen also eine hundertste Wurzel zwischen 1 und $1{,}0233$ haben. □

Verfahren 6.14

Gegeben: Positive Zahl $a > 0$

Gesucht: $\log(a)$

Lösung: (1) Berechne a^n für ein sehr großes n, z.B. a^{100}

(2) Ziehe auf beiden Seiten die n-te Wurzel mit Hilfe des Potenzgesetzes $\sqrt[n]{\ } = (\,)^{\frac{1}{n}}$.

(3) Man erhält eine Gleichung der Form $a = \sqrt[n]{c} \cdot 10^{\ell}$ mit $0 < c < 10$

(4) Wegen Satz ?? ist $\sqrt[n]{c} \approx 1$ und es folgt $\log(a) \approx \ell$

Beispiel 6.15 Wir berechnen $\log(2)$:

(1) $2^{100} = 1{,}27 \cdot 10^{30}$

(2) $2 = \sqrt[100]{1{,}27 \cdot 10^{30}} = \sqrt[100]{1{,}27} \cdot \sqrt[100]{10^{30}} = \sqrt[100]{1{,}27} \cdot \left(10^{30}\right)^{\frac{1}{100}} = \sqrt[100]{1{,}27} \cdot 10^{0{,}3}$

(3) $2 = \sqrt[100]{1{,}27} \cdot 10^{0{,}3}$

(4) $2 \approx 10^{0{,}3} \Rightarrow \log(2) = 0{,}3$

#

6.6 Die Ableitung von Exponentialfunktionen

Das wichtigste Werkzeug bei der Untersuchung von Funktionen ist die Ableitung. Für die Ableitung einer Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ haben wir jedoch bisher noch keine Regel, denn die Potenzregel gilt nur für Fuktionen, bei denen das x in der Basis steht!

Satz 6.16 Es gilt

$$(10^x)' \approx c \cdot 10^x$$

wobei $c = \lim\limits_{h\to 0} \frac{10^h - 1}{h} \approx 2{,}3026$.

Beweis:

$$(10^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{10^{x+h} - 10^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{10^x \cdot 10^h - 10^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{10^x \cdot (10^h - 1)}{h} = 10^x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{10^h - 1}{h}$$

Den Näherungswert für c erhalten wir, indem wir ein immer kleiner werdendes h einsetzen:

h	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$\frac{10^h-1}{h}$	9	2,58925...	2,329299...	2,305238...	2,30285...	2,3026...

□

Für die Herleitung der Ableitung von a^x benötigen wir noch das folgende Ergebnis:

Satz 6.17

$$\lim_{h\to 0} \frac{10^{\ell h}-1}{h} = \ell \cdot c$$

wobei $c = \lim_{h\to 0} \frac{10^h-1}{h} \approx 2{,}3026$.

Beweis: Es gilt

$$\frac{10^{\ell h}-1}{h} = \frac{10^{\ell h}-1}{\ell h} \cdot \ell \overset{k=\ell h}{=} \frac{10^k-1}{k} \cdot \ell$$

Wenn nun h gegen 0 geht, geht auch $k = \ell \cdot h$ gegen 0. Also gilt

$$\lim_{h\to 0} \frac{10^{\ell h}-1}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{10^k-1}{k} \cdot \ell = c \cdot \ell$$

□

Damit erhalten wir nun die Ableitungsregel für Exponentialfunktionen:

Satz 6.18 Für jede Zahl $a > 0$ gilt

$$(a^x)' = \log(a) \cdot c \cdot a^x$$

mit $c = \lim_{h\to 0} \frac{10^h-1}{h} \approx 2{,}3026$.

Beweis: Zunächst gilt $a = 10^\ell$ mit $\ell = \log(a)$ und damit $a^x = 10^{\ell x}$. Damit rechnen wir wie im Beweis von **Satz 6.16**:

$$
\begin{aligned}
(a^x)' &= \left(10^{\ell x}\right)' \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{10^{\ell(x+h)} - 10^{\ell x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{10^{\ell x+\ell h} - 10^{\ell x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{10^{\ell x} \cdot (10^{\ell h} - 1)}{h} \\
&= 10^{\ell x} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{10^{\ell h} - 1}{h} \\
&= 10^{\ell x} \cdot c \cdot \ell \\
&= a^x \cdot c \cdot \ell
\end{aligned}
$$

□

Beispiel 6.19 Wir berechnen die Ableitung von $f(x) = 3 \cdot 2^x - 6$:

$$f'(x) = (3 \cdot 2^x - 6)' = 3 \cdot (2^x)' = 3 \cdot \log(2) \cdot c \cdot 2^x \approx 3 \cdot 0{,}30103 \cdot 2{,}3026 \approx 0{,}189 \cdot 2^x$$

#

6.7 Die natürliche Exponentialfunktion

Wie wir gesehen haben, gilt die Ableitungsregel

$$(a^x)' = \log(a) \cdot c \cdot a^x$$

mit $c = \lim\limits_{h\to 0} \frac{10^h-1}{h} \approx 2{,}3026$.
Diese Regel ist noch nicht so richtig zufriedenstellend, da sie die seltsame Zahl $c \approx 2{,}3026$ beinhaltet, die wir nur näherungsweise berechnet haben. In diesem Abschnitt geht es darum, diese Zahl »loszuwerden«. Die Idee ist die folgende: Wir suchen die Zahl a, für die $\log(a) \cdot c = 1$ gilt. Dann erhalten wir die Formel $(a^x)' = a^x$.

Definition 6.20 *Die* **eulersche Zahl** e *ist die Zahl, für die* $\log(e) \cdot c = 1$ *gilt, wobei* $c = \lim\limits_{h\to 0} \frac{10^h-1}{h} \approx 2{,}3026$*. Also gilt*

$$
\begin{aligned}
& \log(e) \cdot 2{,}3026 \approx 1 && |: 2{,}3026 \\
\iff & \log(e) \approx 0{,}4343 \\
\iff & e \approx 10^{0{,}4343} \approx 2{,}7183
\end{aligned}
$$

Die Funktion e^x *heißt* **natürliche Exponentialfunktion***.*

Satz 6.21 Es gilt $(e^x)' = e^x$, die e-Funktion ist also gleich ihrer eigenen Ableitung!

Beweis:

$$(e^x)' = \underbrace{\log(e) \cdot c}_{=1} \cdot e^x$$

□

Bisher haben wir alle positiven Zahlen als Zehnerpotenz geschrieben. Es ist aber genauso möglich, Zahlen als e-Potenz zu schreiben. Dafür benötigen wir einen anderen Logarithmus:

Satz 6.22 Man kann jede positive Zahl $a > 0$ in der Form

$$a = e^k$$

schreiben. Die Zahl k ist der **natürliche Logarithmus** von a, geschrieben $\ln(a)$ (»logarithmus naturalis«). Es gilt der folgende Zusammenhang zum Zehner-Logarithmus:

$$\ln(a) = \frac{\log(a)}{\log(e)}$$

Beweis: Wir schreiben $a = 10^{\log(a)}$ und $e = 10^{\log(e)}$ als Zehnerpotenz. Aus der zweiten Gleichung folgt $10 = e^{\frac{1}{\log(e)}}$. Insgesamt folgt

$$a = 10^{\log(a)} = \left(e^{\frac{1}{\log(e)}}\right)^{\log(a)} = e^{\frac{\log(a)}{\log(e)}}$$

□

Diese eulersche Zahl e ist für die Analysis von überragender Wichtigkeit. Mit ihrer Hilfe können wir nun die Ableitungsregel für Exponentialfunktionen ohne dieses mystische c schreiben:

Satz 6.23 Es gilt

$$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$$

Beweis: Für e gilt nach Definition die Gleichung $\log(e) \cdot c = 1$, also ist $c = \frac{1}{\log(e)}$. Dies muss man nur in die bekannte Formel für die Ableitung einsetzen. Dann erhält man

$$(a^x)' = \log(a) \cdot c \cdot a^x = \frac{\log(a)}{\log(e)} \cdot a^x = \ln(a) \cdot a^x$$

□

Beispiel 6.24

(a) Wir bestimmen die Ableitung von $f(x) = 5^x$:

$$f'(x) = \ln(5) \cdot 5^x \approx 1{,}61 \cdot 5^x$$

(b) Wir bestimmen die Extrema von $f(x) = 3 \cdot 1{,}7^{-2x+2} + 8x + 2$. Es gilt

$$f(x) = 3 \cdot 1{,}7^{-2x+2} + 8x + 2 = 3 \cdot \left(1{,}7^{-2}\right)^x \cdot 1{,}7^2 + 8x + 2 = 3 \cdot 0{,}346^x \cdot 2{,}89 + 8x + 2 = 8{,}67 \cdot 0{,}346^x + 8x + 2$$

Damit folgt

$$f'(x) = 8{,}67 \cdot \ln(0{,}346) \cdot 0{,}346^x + 8 \approx -9{,}2 \cdot 0{,}346^x + 8$$

und dies führt zur Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x) \\ 0 &= -9{,}2 \cdot 0{,}346^x + 8 \\ 9{,}2 \cdot 0{,}346^x &= 8 \\ 0{,}346^x &= 0{,}87 \\ 10^{-0{,}4609x} &= 10^{-0{,}06048} \\ -0{,}4609x &= -0{,}06048 \\ x &= 0{,}131223 \end{aligned}$$

Also ist $x_1 = 0{,}131223$ der einzige Kandidat für die Extrempunkte. Mit

$$f''(x) = -9{,}2\ln(0{,}346) \cdot 0{,}346^x \approx 9{,}764 \cdot 0{,}346^x$$

folgt $f''(0{,}131223) \approx 8{,}49 > 0$ und deshalb ist $x_1 = 0{,}131223$ eine Tiefstelle.

#

7 Zusammengesetzte Exponentialfunktionen

Im Zusammenhang mit Exponentialfunktionen hat man es häufig mit zusammengesetzten Funktionen wie etwa $f(x) = x^2 \cdot 4^x$ zu tun. Da das wichtigste Hilfsmittel für die Untersuchung von Funktionen die Ableitung ist, stellt sich die Frage, wie wir diese hier bestimmen können.

7.1 Die Produktregel

Zunächst könnte man vermuten, dass folgendes gilt:

$$f(x) = x^2 \cdot 4^x \Rightarrow f'(x) = \left(x^2\right)' \cdot \left(4^x\right)' = 2x \cdot \ln(4) \cdot 4^x \approx 2{,}773 \cdot x \cdot 4^x$$

d.h., wir leiten einfach beide Faktoren ab. Diese Regel ist allerdings **nicht richtig**, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 7.1 Es sei $f(x) = x^2 \cdot x^3$. Wenn die obige Regel gelten würde, dann wäre

$$f'(x) = \left(x^2\right)' \cdot \left(x^3\right)' = 2x \cdot 3x^2 = 6x^3$$

Dies ist jedoch **falsch**, da wir die Ableitung auf anderem Wege bilden können:

$$f(x) = x^2 \cdot x^3 = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$$

Dieses Ergebnis muss richtig sein, weil wir nur bekannte Regeln verwendet haben. #

In diesem Abschnitt geht es also darum, eine Ableitungsregel für Funktionen der Form

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

zu finden.
Die korrekte Regel lautet folgendermaßen:

Satz 7.2 Die **Produktregel** der Differentialrechnung lautet

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Wir prüfen das zunächst an obigem Beispiel:

Beispiel 7.3 $f(x) = x^2 \cdot x^3$. Dann ist $u = x^2$ und $v = x^3$. Daraus folgt $u' = 2x$ und $v' = 3x^2$. Einsetzen in die Formel ergibt

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 2x \cdot x^3 + x^2 \cdot 3x^2 = 2x^4 + 3x^4 = 5x^4$$

und dies ist die korrekte Ableitung. #

Wir beweisen nun die Produktregel:

Beweis: Es sei $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Wir suchen also

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h}$$

Nun machen wir uns zunächst folgendes klar:

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \Rightarrow u'(x) \cdot h \approx u(x+h) - u(x) \Rightarrow u'(x) \cdot h + u(x) \approx u(x+h)$$

Also gilt $u(x+h) \approx u(x) + h \cdot u'(x)$ und genauso $v(x+h) \approx v(x) + h \cdot v'(x)$. Wenn wir dies in die obige Gleichung einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
f'(x) &\approx \frac{u(x+h) \cdot v(x+h) - u(x) \cdot v(x)}{h} \\
&\approx \frac{[u(x) + h \cdot u'(x)] \cdot [v(x) + h \cdot v'(x)] - u(x) \cdot v(x)}{h} \\
&= \frac{u(x) \cdot v(x) + h \cdot u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot h \cdot v'(x) + h \cdot u'(x) \cdot h \cdot v'(x) - u(x) \cdot v(x)}{h} \\
&= \frac{h \cdot u'(x) \cdot v(x) + h \cdot u(x) \cdot v'(x) + h^2 \cdot u'(x) \cdot v'(x)}{h} \\
&= \frac{h \cdot [u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + h \cdot u'(x) \cdot v'(x)]}{h} \\
&= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + h \cdot u'(x) \cdot v'(x)
\end{aligned}$$

Wenn nun h gegen 0 geht, erhalten wir

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + h \cdot u'(x) \cdot v'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

□

Beispiel 7.4

(a) $f(x) = (x^2 + 3x) \cdot 1{,}3^x$

$$u = x^2 + 3x \text{ und } v = 1{,}3^x \quad \Rightarrow \quad u' = 2x + 3 \text{ und } v' = \ln(1{,}3) \cdot 1{,}3^x \approx 0{,}262 \cdot 1{,}3^x$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{f'(x)} &= u' \cdot v + u \cdot v' = (2x+3) \cdot 1{,}3^x + (x^2 + 3x) \cdot (0{,}262 \cdot 1{,}3^x) \\
&= (2x+3) \cdot 1{,}3^x + (0{,}262x^2 + 0{,}786x) \cdot 1{,}3^x \\
&= 1{,}3^x \cdot \left[(2x+3) + (0{,}262x^2 + 0{,}786x)\right] = 1{,}3^x \cdot (0{,}262x^2 + 2{,}786x + 3)
\end{aligned}$$

#

7.2 Kurvendiskussion zusammengesetzter Funktionen

Wir befassen uns nun mit Funktionen der Form

$$f(x) = u(x) \cdot a^x$$

wobei u ein Polynom sein soll, also z.B. $f(x) = x \cdot e^x$ oder $f(x) = (x^3 - 2x + 1) \cdot 0{,}7^x$.

Beispiel 7.5 Wir bestimmen die Extrempunkte von $f(x) = (x^2 + 3x) \cdot 1{,}3^x$. Wir haben die Ableitung bereits in **Beispiel 7.4** bestimmt:

$$f'(x) = 1{,}3^x \cdot (0{,}262x^2 + 2{,}786x + 3)$$

Um die Extremstellen zu finden, muss man die Gleichung $f'(x) = 0$ lösen:

$$\begin{aligned}
&0 = f'(x) \\
&0 = 1{,}3^x \cdot (0{,}262x^2 + 2{,}786x + 3) && \mid \text{Produktgleichung!} \\
&0 = 1{,}3^x \ \text{↯} \qquad \text{oder} && 0{,}262x^2 + 2{,}786x + 3 = 0 \ \mid : 0{,}262 \\
& && x^2 + 10{,}63x + 11{,}45 = 0 \quad \mid p\text{-}q\text{-Formel} \\
& && x_1 \approx -9{,}41 \quad x_2 \approx -1{,}22
\end{aligned}$$

Abschließend müssen wir noch prüfen, welche Art Extremum vorliegt:

$$\begin{aligned}
f'(-10) &\approx 0{,}1 > 0 \Rightarrow \text{steigt} \\
f'(-5) &\approx -1{,}18 < 0 \Rightarrow \text{fällt} \\
f'(0) &= 3 > 0 \Rightarrow \text{steigt}
\end{aligned}$$

Also ist $(-9{,}41 \mid -5{,}11)$ ein Hochpunkt und $(-1{,}22 \mid -1{,}58)$ ein Tiefpunkt. #

Wir fassen das Verfahren zusammen:

Verfahren 7.6

Gegeben: Funktion der Form $f(x) = u(x) \cdot a^x$, $u(x)$ Polynom

Gesucht: Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen

Lösung: (1) **Nullstellen:**

   (1) Ansatz: $0 = f(x) \Rightarrow$ Produktgleichung: Wenn ein Produkt 0 ist, muss mindestens ein Faktor 0 sein

   (2) Löse beide Gleichungen $0 = u(x)$ und $0 = a^x$ getrennt. **Beachte, dass Exponentialfunktionen niemals 0 sind.**

(2) **Extrema:**

   (1) Bestimme $f'(x)$ mit der Produktregel.

   (2) Klammere die Exponentialfunktion aus und fasse zusammen.

   (3) Ansatz: $0 = f'(x)$. Das geht genauso wie bei den Nullstellen!

   (4) Prüfe, welche Art Extremum vorliegt.

(3) **Wendestellen:**

   (1) Bestimme $f''(x)$ mit der Produktregel.

   (2) Klammere die Exponentialfunktion aus und fasse zusammen.

   (3) Ansatz: $0 = f''(x)$. Das geht genauso wie bei den Nullstellen/Extremstellen!

   (4) Prüfe, ob wirklich eine Wendestelle vorliegt.

Abschließend sehen wir noch, wie man Funktionen der Form $f(x) = u(x) \cdot b^{c \cdot x}$ untersucht:

Satz 7.7 Man kann jeden Term der Form $b^{c \cdot x}$ in der Form a^x schreiben.

Beweis: Zunächst machen wir uns das an einem Beispiel klar: Wenn wir das Potenzgesetz $\left(a^b\right)^c = a^{b \cdot c}$ verwenden, erhalten wir z.B.

$$3^{2x} = \left(3^2\right)^x = 9^x$$

Nun allgemein:

$$b^{c \cdot x} = (b^c)^x = a^x$$

wobei $a = b^c$. □

Beispiel 7.8 #

Beispiel 7.9 Wir bestimmen die Nullstellen, die Extrema und die Wendepunkte von

$$f(x) = (2x - 6) \cdot 2^{-1,5x}$$

#

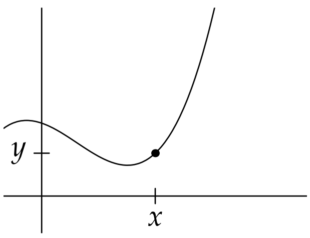
8 Trigonometrische Funktionen

9 Modellieren mit Funktionen

In diesem Kapitel wenden wir alles bisher Erlernte an, um Sachverhalte mit Hilfe von Funktionen zu modellieren. Wie wir sehen werden, ergeben sich geometrische aber auch zahllose andere Anwendungen für Funktionen.
Eine Funktion ist eine Rechenvorschrift, die es erlaubt, aus einer Größe x eine abhängige Größe y zu berechnen. Bisher waren die Funktionen in den meisten Fällen vorgegeben. In diesem Kapitel geht es darum, wie man eine Funktion aufstellen kann, um damit eine konkrete Abhängigkeit zu beschreiben und zu untersuchen.

9.1 Anforderungen an Funktionen

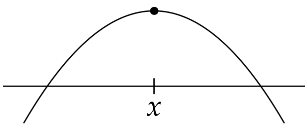
Anforderungen an Funktionen können stets als Gleichungen formuliert werden. Jede Anforderung wird übersetzt in eine oder mehrere Gleichungen, die insgesamt zu einem Gleichungssystem führen. Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert dann die gesuchte Funktion.
Die gängigsten Anforderungen an Funktionen sind die folgenden:



verläuft durch $(x \mid y)$

$\Downarrow$

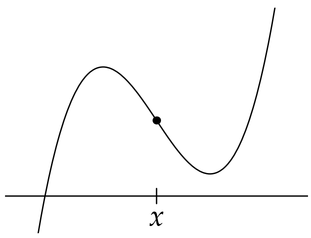
$f(x) = y$



Extremum/Sattelpunkt bei x

$\Downarrow$

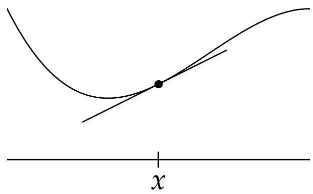
$f'(x) = 0$



Wendepunkt bei x

$\Downarrow$

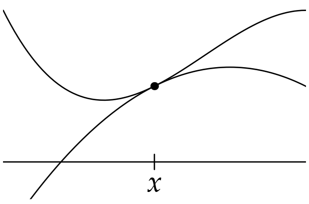
$f''(x) = 0$



Steigung bei x ist s

$\Downarrow$

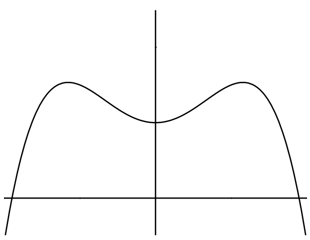
$f'(x) = s$



f berührt g in x /
f schließt knickfrei an g an

$\Downarrow$

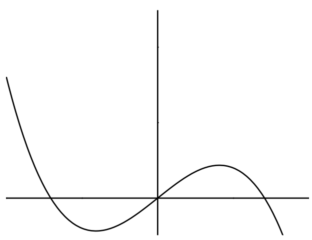
$f(x) = g(x), f'(x) = g'(x)$



achsensymmetrisch

$\Downarrow$

ungerade Exponenten fallen weg



punktsymmetrisch

$\Downarrow$

gerade Exponenten fallen weg

Verfahren 9.1 (Funktionsgleichung aufstellen)

Gegeben: Text mit Anforderungen an eine Funktion

Gesucht: Funktionsgleichung

Lösung: (1) (Wenn Sachzusammenhang existiert:) Funktion verbal definieren

(2) Ansatz für Funktionsgleichung aufstellen, u.U. Ableitungen bilden

(3) Anforderungen in Gleichungen übersetzen

(4) Gleichungssystem lösen

(5) Funktionsgleichung angeben

Beispiel 9.2 Die Firma XY-Enterprises wurde im Jahr 2001 gegründet. Der Jahresgewinn erlebte seitdem einige Höhen und Tiefen: Bis 2004 stieg der Gewinn, danach fiel er wieder, bis er im Jahr 2010 einen Tiefpunkt mit einem Minus von satten 4.000.000 € erreichte. Im Jahr 2015 stieg der Gewinn um 2.000.000 €. Leiten Sie eine Funktion dritten Grades her, die den Jahresgewinn der Firma beschreibt.

(1) $g(t) =$ Jahresgewinn (in Mio), t Jahre nach 2001

(2) »dritten Grades« $\Rightarrow$ Ansatz: $g(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \Rightarrow g'(t) = 3at^2 + 2bt + c$

(3)
- »Hochpunkt«: $g'(3) = 0 \Rightarrow 27a + 6b + c = 0$
- »Tiefpunkt«: $g'(9) = 0 \Rightarrow 243a + 18b + c = 0$
- »Punkt«: $g(9) = -4 \Rightarrow 729a + 81b + 9c + d = -4$
- »Steigung«: $g'(14) = 2 \Rightarrow 588a + 28b + c = 2$

(4) LGS lösen (mit TR) $\Rightarrow a \approx 0{,}01212,\ b \approx -0{,}218,\ c \approx 0{,}982,\ d = -4$

(5) $g(t) = 0{,}01212t^3 - 0{,}218t^2 + 0{,}982t - 4$

#

9.2 Verschieben von Funktionen

Hin und wieder kommt es vor, dass eine Funktion im Koordinatensystem verschoben werden soll (z.B. bei den trigonometrischen Funktionen). In diesem Fall nutzt man folgenden Satz:

Satz 9.3 Sei f eine beliebige Funktion. Dann ist ...

(a) ... $g(x) = f(x - c)$ im Vergleich zu f um c nach rechts verschoben.

(b) ... $g(x) = f(x) + d$ im Vergleich zu f um d nach oben verschoben.

Beweis:

(a) Wir machen uns dies am Beispiel $c = 2$ klar, d.h. $g(x) = f(x - 2)$:

Dann gilt $g(0) = f(-2)$, $g(1) = f(-1)$, $g(2) = f(0)$, $g(3) = f(1)$. Die Funktion g erreicht also die y-Werte von f erst zwei Schritte auf der x-Achse später. Darum ist der Graph um c nach rechts verschoben.

(b) Wir machen uns dies am Beispiel $d = 4$ klar, d.h. $g(x) = f(x) + 4$:

Dann ist der y-Wert von g immer um 4 größer als der von f. Darum ist der Graph um d nach oben verschoben.

□

Beispiel 9.4 Die Funktion $f(x) = 3x^2 - \sin(x)$ soll um 1 nach links und um 2 nach oben verschoben werden

$$\Rightarrow g(x) = f(x - (-1)) + 2 = f(x + 1) + 2 = 3(x + 1)^2 - \sin(x + 1) + 2$$

#

II

Analysis II

1 Mittelwerte und bestimmtes Integral

In diesem Kapitel erarbeiten wir Methoden, mit deren Hilfe man den Mittelwert einer Funktion über einem Intervall bestimmen kann. Dieser ist immer dann gefragt, wenn sich eine Größe kontinuierlich ändert. Dazu zwei Beispiele:

Beispiel 1.1

(a) Der Wert einer Aktie ist gegeben durch

$$f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 20x + 10$$

wobei $x \geq 0$ die Zeit in Monaten seit Beobachtungsbeginn (1. Januar) ist (vgl. **Abb. 7** (a)). Für einen Zeitungsartikel soll nun eine Tabelle erstellt werden, in dem der Wert der Aktie in den einzelnen Monaten des ersten Quartals aufgeführt ist.
Da zum Monat Januar alle Zahlen von 0 bis 1 auf der x-Achse gehören, sollte in dieser Tabelle der *durchschnittliche* Wert im Monat Januar stehen und nicht etwa der Wert zu Beginn, am Ende oder irgendwo »mittendrin«. Gesucht ist also der Mittelwert der Funktion f über dem Interval $[0; 1]$, für den Monat Februar entsprechend über dem Intervall $[1; 2]$ usw.

(b) Der Bordcomputer eines Autos zeigt jederzeit die aktuelle Geschwindigkeit an. Also gibt es eine Funktion $f(x)$, die die Geschwindigkeit (in km/h) zum Zeitpunkt x Stunden nach Beobachtungsbeginn beschreibt. Abb. ?? zeigt einen möglichen Verlauf der Funktion f.
Nun stellt sich die Frage, welche Strecke das Auto in dem beobachteten Zeitraum (von $x = 0$ bis $x = 6$ insgesamt zurückgelegt hat. Zunächst bestimmen wir den Mittelwert grafisch (siehe Abbildung), er liegt bei etwa $88\,\mathrm{km/h}$. D.h., das Auto ist 6 Stunden lang im Schnitt ungefähr $88\,\mathrm{km/h}$ gefahren. Also hat es $6 \cdot 88 = 528\,\mathrm{km}$ zurückgelegt. #

Die Problemstellung für dieses Kapitel lautet also:
Wie bestimmt man den mittleren y-Wert einer Funktion f über einem Intervall $[a; b]$?

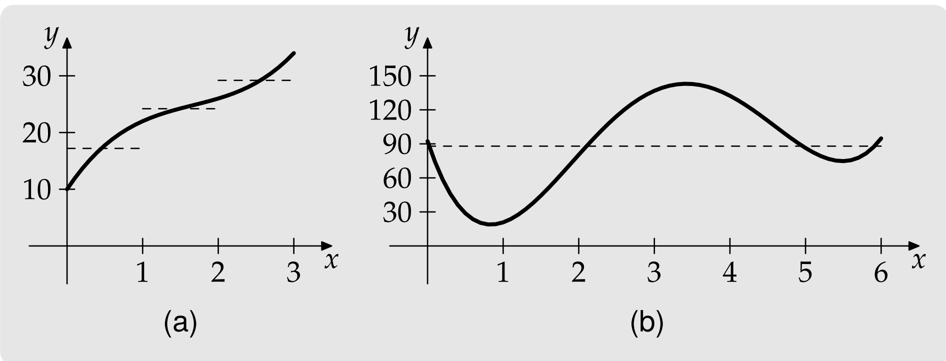


Abbildung 7 Links der Wert einer Aktie im ersten Quartal, rechts die aktuelle Geschwindigkeit eines Autos. Die gesuchten Mittelwerte sind jeweils eingezeichnet.

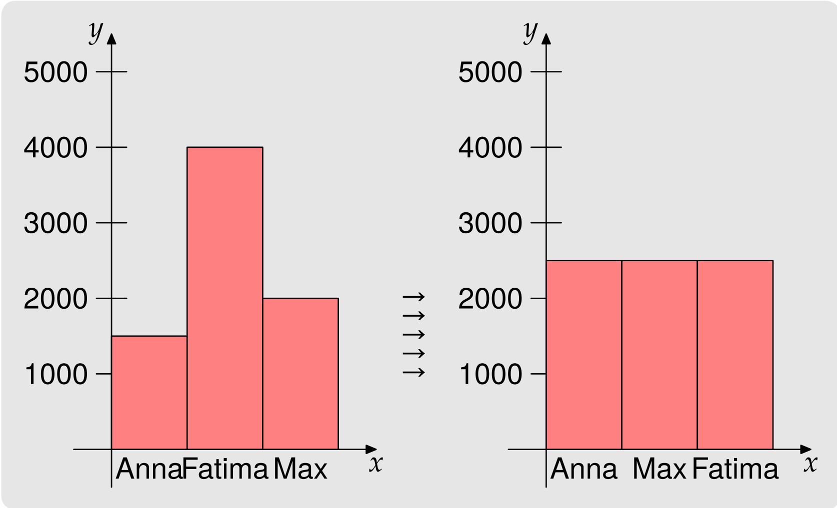


Abbildung 8 Anna verdient 1500 €, Fatima 4000 € und Max 2500 € im Monat. Das Durchschnittsgehalt erhält man dadurch, dass man das Gesamtgehalt gleichmäßig auf die Drei aufteilt.

1.1 Mittelwerte berechnen

Definition 1.2 *Der* **Mittelwert** *der Zahlen* $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ *ist die Summe aller Zahlen, geteilt durch deren Anzahl, d.h.*

$$MW = (y_1 + y_2 + \dots + y_n) : n = \frac{1}{n} \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

Bemerkung 1.3 Die grundlegende Idee des Mittelwerts ist die einer *gleichmäßigen Verteilung*: Angenommen, Anna, Fatima und Max verdienen monatlich 1500 €, 4000 € bzw. 2000 €. Den durchschnittlichen Verdienst erhält man dann, indem man alles Geld zusammennimmt und gleichmäßig unter den Drei aufteilt:

$$1500 + 2000 + 4000 = 7500; \qquad 7500 : 3 = 2500$$

Im Schnitt verdienen die Drei also 2500 € im Monat. **Abb. 8** veranschaulicht das Vorgehen. #

Dieses Vorgehen können wir jedoch nicht 1:1 auf Funktionen übertragen, weil wir unendlich viele Funktionswerte aufsummieren müssten. Wir können den Mittelwert jedoch näherungsweise berechnen, indem wir den Mittelwert für endlich viele Funktionswerte berechnen. Wenn es genügend Werte sind und das Intervall von $x = a$ bis $x = b$ gleichmäßig unterteilt wird, sollte dieser Näherungswert ziemlich exakt sein:

Verfahren 1.4

Gegeben:	Funktion $f(x)$, Intervall $[a; b]$
Gesucht:	Mittelwert von f über $[a; b]$

Lösung: (1) Unterteile das Intervall in gleich große Abschnitte; dadurch entstehen Stellen x_1 bis x_n auf der x-Achse, wobei $x_1 = a$ und $x_n = b$.

(2) Berechne den Mittelwert der Zahlen $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$. Dieser ist eine Näherung für den gesuchten Mittelwert, d.h.

$$MW \approx \frac{1}{n} \cdot \left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\right)$$

1.2 Mittelwerte grafisch bestimmen

In der Veranschaulichung aus **Abb. 8** wurden die Zahlen als Säulen dargestellt. Dies erlaubt es, eine weitere anschauliche Bedeutung des Mittelwerts zu formulieren, die uns später nützlich sein wird:

Satz 1.5 Wenn man durch ein Schaubild einer Funktion eine Gerade parallel zur x-Achse zieht, steht ein gewisser Teil der Fläche über und ein anderer Teil fehlt. Die Gerade, bei der die überstehenden Flächen-Teile genauso groß sind wie die fehlenden Flächen-Teile, markiert auf der y-Achse den Mittelwert. (Vgl. **Abb. 9** rechts.)

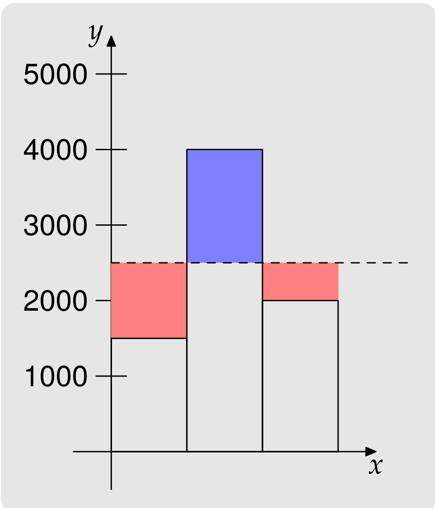


Abbildung 9 Der Mittelwert ist die Stelle an der y-Achse, für die die fehlenden Teile (rot) genauso groß sind wie die überstehenden Teile (blau). Anders formuliert: Wenn man die blaue Fläche auf die roten Bereiche aufteilt, erhält man ein Rechteck.

Damit kann man den Mittelwert näherungsweise grafisch bestimmen:

Verfahren 1.6

Gegeben:	Funktion f, Intervall $[a; b]$
Gesucht:	Mittelwert von f über $[a; b]$
Lösung:	(1) Zeichne den Graphen im Bereich $x = a$ bis $x = b$.
	(2) Verschiebe das Lineal parallel zur x-Achse, bis die überstehenden und die fehlenden Flächenteile etwa gleich groß sind.
	(3) Das Lineal markiert den Mittelwert auf der y-Achse.

1.3 Das bestimmte Integral

Wir haben in Verfahren ?? eine Methode kennengelernt, mit der wir den Mittelwert einer Funktion näherungsweise berechnen können. Diese Methode sollte immer genauer werden, je mehr Funktionswerte wir verwenden, d.h.

Satz 1.7 Der Mittelwert einer Funktion f über dem Intervall $[a; b]$ ist gegeben durch den Grenzwert

$$MW = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot big(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\big)$$

wobei $x_1 = a$ und $x_n = b$ sein muss und die übrigen x_i gleichmäßig zwischen a und b liegen müssen.

Dieser Grenzwert ist im Allgemeinen sehr schwer zu bestimmen. Darum behilft man sich damit, dass man einen sehr ähnlichen Grenzwert verwendet, der sich sehr leicht berechnen lässt:

Definition 1.8 *Das* ***bestimmte Integral*** *von f über dem Intervall $[a; b]$ ist das Produkt aus Mittelwert und Intervallbreite, d.h. der Grenzwert*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a) \cdot MW = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \big(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\big)$$

mit $x_1 = a$ und $x_n = b$ und den übrigen x_i gleichmäßig zwischen a und b.

Bemerkung 1.9 Wir wollen kurz klären, woher die seltsame Schreibweise für das bestimmte Integral stammt:
Die Klammer auf der rechten Seite kann man ausmultiplizieren und erhält

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \big(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\big) = \lim_{n\to\infty} f(x_1) \cdot \frac{b-a}{n} + f(x_2) \cdot \frac{b-a}{n} + \ldots + f(x_n) \cdot \frac{b-a}{n}$$

Der Term $\frac{b-a}{n}$ hat eine Bedeutung: Er gibt die Abstände zwischen den Stellen auf der x-Achse an. Darum schreiben wir $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Dies ergibt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + \ldots + f(x_n)\cdot\Delta x$$

d.h., das Integralzeichen $\int$ steht für »Summe«, das $f(x)$ für die Funktionswerte und das $\mathrm{d}x$ für den Abstand Δx, wenn n unendlich groß wird. #

Bemerkung 1.10 Man kann das bestimmte Integral mit Hilfe des Taschenrechners bestimmen. #

Damit können wir umgekehrt den Mittelwert einer Funktion bestimmen:

Satz 1.11 Es gilt

$$MW = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

Beweis: Übung! □

Beispiel 1.12 Wir können nun die Eingangsbeispiele mit Taschenrechner-Hilfe rechnerisch lösen:

(a) Gesucht ist der Mittelwert von

$$f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 20x + 10$$

über den Intervallen $[0;1]$ (Januar), $[1;2]$ (Februar) und $[2;3]$ (März). Mit dem Taschenrechner erhalten wir

Jan: $\int_0^1 2x^3 - 10x^2 + 20x + 10\,\mathrm{d}x = \frac{103}{6} \approx 17{,}17 \Rightarrow MW \approx \frac{17{,}17}{1-0} = 17{,}17\,€$

Feb: $\int_1^2 2x^3 - 10x^2 + 20x + 10\,\mathrm{d}x = \frac{145}{6} \approx 24{,}17 \Rightarrow MW \approx \frac{24{,}17}{1-0} = 24{,}17\,€$

Mär: $\int_2^3 2x^3 - 10x^2 + 20x + 10\,\mathrm{d}x = \frac{175}{6} \approx 29{,}17 \Rightarrow MW \approx \frac{29{,}17}{1-0} = 29{,}17\,€$

(b) Die Geschwindigkeit ist gegeben durch die Funktion

$$f(x) = 3{,}2x^4 - 41{,}6x^3 + 168x^2 - 201{,}2x + 92.4$$

Wir erhalten die gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit während der ersten 6 Stunden durch

$$\int_0^6 3{,}2x^4 - 41{,}6x^3 + 168x^2 - 201{,}2x + 92.4\,\mathrm{d}x = \frac{13176}{25} = 527{,}04 \quad \Rightarrow MW = 527{,}04 : 6 = 87{,}84$$

und damit legt das Auto in den 6 Stunden $87{,}84 \cdot 6 = 527{,}04\,\mathrm{km}$ zurück. #

2 Änderungsraten und Stammfunktionen

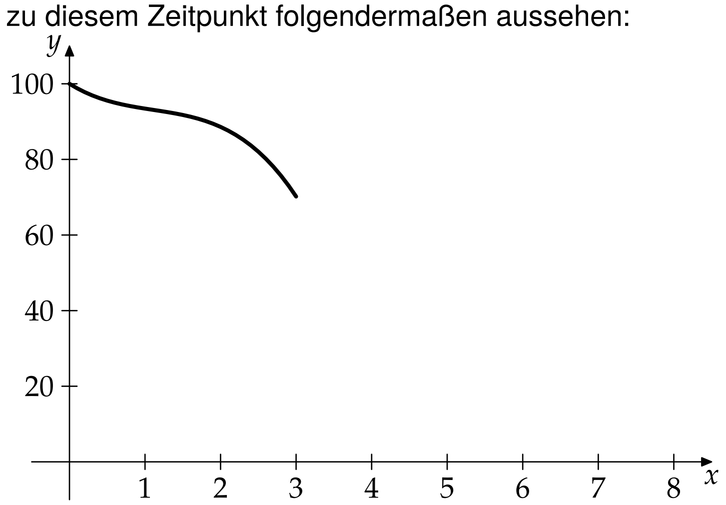
Ziel dieses Kapitels ist es, eine Formel für die Berechnung von Integralen zu finden.

2.1 Die aktuelle Änderungsrate

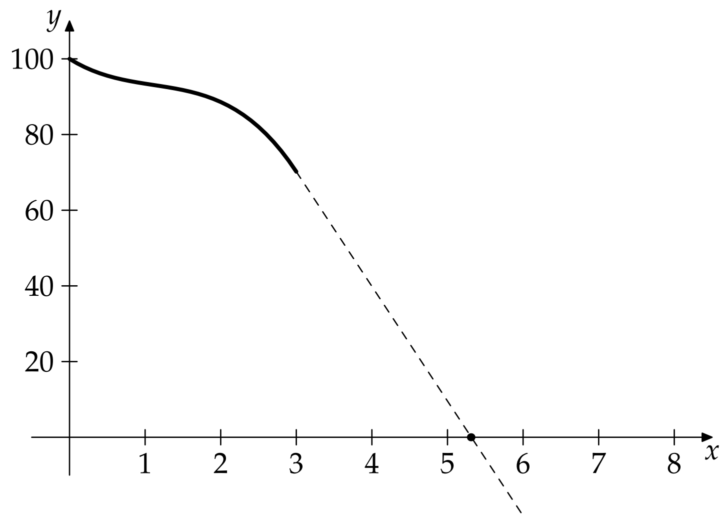
Beispiel 2.1 Es gibt Apps, die die voraussichtliche Restlaufzeit des Akkus anzeigen. Klar ist, dass die Akkulaufzeit von den verwendeten Apps, den aktuellen Einstellungen (WLAN, Bluetooth usw.) und vielem mehr abhängt. Die Frage ist nun, wie solche Apps die restliche Laufzeit des Handys berechnen können. Zur Verfügung stehen alle bisherigen Ladestände des Handys. Wir bezeichnen diese Daten als Funktion f, genauer:

$$f(x) = \text{Ladestand in Prozent nach } x \text{ Stunden seit Beobachtungsbeginn}$$

Angenommen, wir befinden uns am Zeitpunkt $x = 3$, also 3 Stunden nach Beobachtungsbeginn. Die Funktion F könnte bis zu diesem Zeitpunkt folgendermaßen aussehen:



Um nun herauszufinden, wie lange der Akku noch halten wird, wenn man das Handy weiter so verwendet wie in den letzten Minuten, dann ist es sinnvoll, die Kurve knickfrei durch eine Gerade fortzusetzen:



Diese Gerade hat eine Steigung von etwa -30, d.h.:

$\boxed{\text{Pro Stunde Nutzung wird der Aku-Stand um } 30\,\% \text{ sinken}}$

Damit sehen wir, dass der Akku noch etwa $2{,}3\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{h}\ 18\,\mathrm{min}$ halten wird, wenn man das Handy weiterhin so nutzt wie in den letzten Minuten. #

Definition 2.2 *Die* **(aktuelle) Änderungsrate** *einer Funktion an einer Stelle x gibt an, um wie viel sich die y-Werte pro Schritt auf der x-Achse ändern würden, wenn die Funktion an dieser Stelle knickfrei in eine Gerade übergehen würde.*

Die Änderungsrate ist natürlich eine alte Bekannte, die nun in neuem Gewand auftritt:

Satz 2.3 Die Änderungsrate von f an der Stelle x ist die Steigung von f an dieser Stelle und damit gilt

$$\text{Änderungsrate an Stelle } x = f'(x)$$

Beispiel 2.4 Die Anzahl der jährlichen Verkehrsunfälle (in Hundert) in einem Landkreis wird durch die Funktion

$$f(x) = 0{,}2x^4 - x^3 + x^2 + x + 2$$

beschrieben, wobei $0 \leq x \leq 2$ die Zeit in Jahren seit Beobachtungsbeginn vor 2 Jahren ist.
Es gilt

$$f'(x) = 0{,}8x^3 - 3x^2 + 2x + 1$$

Zum jetzigen Zeitpunkt $x = 2$ beträgt die Änderungsrate also $f'(2) = 6{,}4 - 12 + 4 + 1 = -0{,}6$. Der Verlauf der Kurve lässt also darauf schließen, dass die Anzahl der jährlichen Verkehrsunfälle pro Jahr um $0{,}6 \cdot 100 = 60$ sinken wird. Wegen $f(2) = 3{,}2 - 8 + 4 + 2 + 2 = 3{,}2$ sind es dieses Jahr etwa 320 Unfälle, im nächsten Jahr dann nur noch 260, dann 200 usw. #

Bemerkung 2.5 Es ist natürlich äußerst unwahrscheinlich, dass die Zahl der Unfälle über einen langen Zeitraum immer weiter abnehmen wird. Daher erlauben aktuelle Änderungsraten nur einen sehr begrenzten Blick in die Zukunft. Im obigen Beispiel ist es vernünftig anzunehmen, dass es im nächsten Jahr nur noch 260 Unfälle sein werden, aber schon für das übernächste Jahr ist eine solche Prognose ziemlich gewagt. Besser ist es in diesem Fall, die *mittlere Änderungsrate* (siehe nächster Abschnitt) zu verwenden. #

2.2 Die mittlere Änderungsrate

Die Berechnung der mittleren Änderungsrate einer Funktion ist denkbar einfach:

Beispiel 2.6 Wir suchen die mittlere Änderungsrate von $f(x) = 3x^2 - 10x + 2$ über dem Intervall $[1;5]$.

Es gilt $f(1) = -5$ und $f(4) = 8$. Also ändern sich die Funktionswerte innerhalb von 4 Schritten auf der x-Achse um 13 Schritte. Daher ist die mittlere Änderungsrate $\frac{13}{4} = 3{,}25$ Schritte pro x-Schritt. #

Damit erhalten wir

Satz 2.7 Die **mittlere Änderungsrate** einer Funktion f im Intervall $[a;b]$ ist gegeben durch

$$m\ddot{A}R = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Bedeutung: Im Intervall $[a;b]$ steigt die Funktion im Durchschnitt mit der Steigung $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Mit unserem erarbeiteten Wissen über Mittelwerte wissen wir aber, dass wir die mittlere Änderungsrate auch auf eine andere Weise berechnen können:

Satz 2.8 Die mittlere Änderungsrate von f über $[a;b]$ ist der Mittelwert von $f'(x)$ über $[a;b]$, d.h.

$$m\ddot{A}R = \frac{\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x}{b - a}$$

Nehmen wir beide Sätze zusammen, so erhalten wir

$$\frac{\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x}{b - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

und das ist äquivalent zu

$$\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass wir mit Hilfe dieser Formel auf sehr einfache Art, Integrale exakt berechnen können.

2.3 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Wir benötigen zunächst folgende Definition:

Definition 2.9 *Eine Funktion $F(x)$ heißt* **Stammfunktion** *von $f(x)$, wenn f die Ableitung von F ist, d.h. wenn*

$$F'(x) = f(x)$$

Satz 2.10 (HDI: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

wobei F eine (beliebige) Stammfunktion von f sein muss.

Beweis: Siehe **Satz 2.8** (ersetze $f(x)$ durch $F(x)$). □

Mit Hilfe des HDI kann man viele Integrale relativ bequem berechnen:

Beispiel 2.11

(a) $\int_1^3 4x^2\,\mathrm{d}x$: Wir benötigen eine Stammfunktion von $f(x) = 4x^2$, also z.B. $F(x) = \frac{4}{3}x^3$.
Damit: $\int_1^3 4x^2\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1) = 36 - \frac{4}{3} = 34,\overline{6}$.

#

Wir führen noch eine sehr praktische Schreibweise ein:

Definition 2.12 *Wir bezeichnen die* **Änderung** *der Funktion f von a bis b mit*

$$[f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$$

Damit kann man Rechnungen mit Integralen stark abkürzen:

Beispiel 2.13

$$\int_2^4 \frac{2}{3}x^4 - x^{-2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{15}x^5 + x^{-1}\right]_2^4 \approx 136{,}783 - 13{,}3 = 123{,}483$$

#

2.4 Stammfunktionen

In disem Abschnitt untersuchen wir Stammfunktionen etwas genauer und leiten Formeln her für die Bestimmung von Stammfunktionen.

Satz 2.14 Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann auch alle Funktionen der Form $G(x) = F(x) + C$. D.h., es gibt unendlich viele Stammfunktionen, deren Graphen alle parallel zueinander sind.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $F'(x) = f(x)$. Daraus ergibt sich

$$G'(x) = \big(F(x) + C\big)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

Also ist auch G eine Stammfunktion von f. □

Beispiel 2.15 Bestimmen Sie die Menge aller Stammfunktionen von $f(x) = -\frac{5}{x^4}$:

Zunächst schreiben wir f als Potenz: $f(x) = -5x^{-4}$. Eine Stammfunktion ist $\frac{5}{3}x^{-3}$. Also sind

$$F(x) = \frac{5}{3}x^{-3} + C$$

alle Stammfunktionen von f. #

Beispiel 2.16 Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x) = -\frac{5}{x^4}$, die durch den Punkt $(1 \mid 4)$ verläuft:

Wir wissen (s.o.): $F(x) = \frac{5}{3}x^{-3} + C$ sind alle Stammfunktionen. Durch Einsetzen des Punktes erhalten wir

$$F(1) = 4 \iff \frac{5}{3} + C = 4 \iff C = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$$

#

Definition 2.17 *Das Finden einer Stammfunktion von f nennt man auch* **Integrieren**. *Man sagt: »Das Integral von f«, wenn man die Stammfunktionen von f meint.*

Wir schreiben $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ für die Menge aller Stammfunktionen von f.

Beispiel 2.18

$$\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$$

#

Abschließend listen wir verschiedene Integrationsregeln auf:

Satz 2.19

Funktion	**Stammfunktionen**
$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x) + C$
$c \cdot f(x)$	$c \cdot F(x) + C$
$x^a,\ a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
x^{-1}	$\ln(\|x\|) + C$
$a^x,\ a > 0$	$\frac{1}{\ln(a)}a^x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$

3 Flächeninhalte

3.1 Das Integral als orientierter Flächeninhalt

Bisher haben wir das Integral nur als Zwischenergebnis verwendet, mit dessen Hilfe wir dann wiederum Mittelwerte berechnen konnten. Die Formel

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\cdot MW$$

lässt jedoch auch eine direkte Interpretation des Integrals zu:

Satz 3.1 Wenn die Funktion f im Intervall $[a;b]$ vollständig oberhalb der x-Achse liegt, ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ der Inhalt der Fläche zwischen f und der x-Achse, d.h.

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis: Da die mittlere Höhe des Graphen der Mittelwert ist, ist der Flächeninhalt zwischen x-Achse und Funktionsgraph derselbe wie der des Rechtecks mit den Seitenlängen $b-a$ und MW. Dieser beträgt

$$A = (b-a)\cdot MW = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Beispiel 3.2
Wir bestimmen den Inhalt A der Fläche aus **Abb. 10**:
Da die Kurve komplett oberhalb der x-Achse liegt, erhalten wir

$$A = \int_{0,5}^{2} -0{,}5x^3 + x^2 + 1\,\mathrm{d}x \overset{TR}{=} 2{,}1328125$$

#

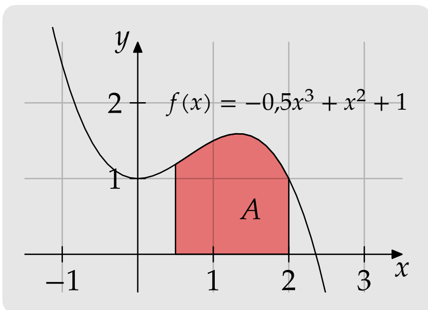


Abbildung 10

Noch einmal: Für positive Funktionen ist das Integral also der Flächeninhalt »unter der Kurve«. Wie sieht es bei negativen Funktionen aus?

Beispiel 3.3

Wir bestimmen den Inhalt A der Fläche aus **Abb. 11**:
Wir berechnen zunächst den Mittelwert der Funktion im Intervall $[0{,}5;2]$:

$$\int_{0{,}5}^{2} -x^2 \,\mathrm{d}x \overset{TR}{=} -1{,}3125 \Rightarrow MW = \frac{1}{2-0{,}5} \cdot \int_{0{,}5}^{2} -x^2 \,\mathrm{d}x = -0{,}875$$

Der Flächeninhalt ist also $A = 0{,}875 \cdot 1{,}5 = 1{,}3125$.
Bis auf das Vorzeichen gilt also auch für negative Funktionen, dass das Integral der Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse ist.

#

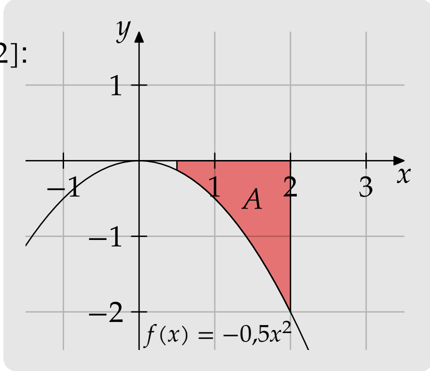


Abbildung 11

Definition 3.4 *Ein Flächeninhalt, der ein Vorzeichen (+ oder −) haben kann, heißt* ***orientierter Flächeninhalt****.*

Satz 3.5 Für alle Funktionen f, die im Intervall $[a;b]$ **keine Nullstellen** haben, gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{Orientierter Flächeninhalt zwischen Kurve und } x\text{-Achse}$$

Beweis: Da f keine Nullstellen im betrachteten Intervall hat, liegt der Graph vollständig ober- oder unterhalb der x-Achse. Wenn der Graph oberhalb liegt, sind wir im Fall von **Satz 3.1**, den wir schon bewiesen haben.
Andernfalls liegt der Graph unterhalb und der Mittelwert ist dadurch negativ. Wegen $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = MW \cdot (b-a)$ ist also auch das Integral negativ. □

Beispiel 3.6 Wir bestimmen den Flächeninhalt A zwischen der Funktion $f(x) = 0{,}2x^3 - x - 2$ über dem Intervall $[-1,3]$:

(1) Nullstellen: $f(x) = 0 \iff 0{,}2x^3 - x - 2 = 0 \overset{TR}{\iff} x_1 \approx -1{,}423$. Also hat f im Intervall $[-1;3]$ keine Nullstellen.

(2) $\int_{-1}^{3} 0{,}2x^3 - x - 2 \,\mathrm{d}x = -8{,}25 \Rightarrow A = 8{,}25$

Der gesuchte Flächeninhalt ist also $8{,}25$ Flächeneinheiten groß. #

Abschließend wollen wir die Bedeutung des Integrals bei Funktionen untersuchen, die im Intervall Nullstellen haben. Dazu machen wir uns zunächst folgenden Satz klar:

Satz 3.7

(a) Für $a < b < c$ gilt $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

(b) Für $c \in \mathbb{R}$ gilt $\int\limits_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Beweis: Es sei F eine Stammfunktion von f.

(a) $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

(b) Wenn man die Funktion $f(x)$ ver-c-facht, dann ver-c-fachen sich alle Funktionswerte und damit auch der Mittelwert und damit auch das Integral:

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = (c \cdot MW) \cdot (b-a) = c \cdot (M \cdot (b-a)) = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Damit kommen wir zur Interpretation des Integrals:

Satz 3.8 Das Integral von f im Intervall $[a;b]$ ist die **Flächenbilanz** zwischen Kurve und x-Achse, d.h.:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{Summe der positiven Flächeninhalte} - \text{Summe der negativen Flächeninhalte}$$

Beweis: Wir teilen das Intervall $[a;b]$ an den Nullstellen der Funktion auf und erhalten so Intervalle, auf denen die Funktion komplett ober- bzw. komplett unterhalb der x-Achse liegt. Wie wir vorher gesehen haben, sind die Flächenteile oberhalb der x-Achse positiv und die unterhalb der x-Achse negativ. Wir haben auch gesehen, dass wir das Gesamt-Integral erhalten, wenn wir die einzelnen Integrale addieren. Effektiv addieren wir also die positiven Flächeninhalte und subtrahieren die negativen Flächeninhalte. □

Beispiel 3.9 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ im Intervall $[-1;3]$. #

3.2 Flächen zwischen Graph und x-Achse

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir alle Zutaten erarbeitet, die zur Berechnung von Flächeninhalten zwischen einem Funktionsgraph und der x-Achse notwendig sind. Wir fassen das Verfahren zusammen:

Verfahren 3.10

Gegeben: Funktion f, Intervall $[a;b]$

Gesucht: Flächeninhalt A zwischen f und der x-Achse

Lösung:

(1) Bestimme/berechne die Nullstellen von f im Intervall $[a;b]$.

(2) Skizziere auf einer Zahlengerade das Intervall $[a;b]$ und die Nullstellen im Inneren des Intervalls. Das Intervall teilt sich dadurch (möglicherweise) in Teil-Intervalle auf.

(3) Bestimme/berechne den orientierten Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse für jedes Teil-Intervall mit Hilfe des Integrals.

(4) Addiere die **Beträge** der Teil-Flächeninhalte zum Gesamt-Flächeninhalt.

Beispiel 3.11 Bestimme den Flächeninhalt, den $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$ im Intervall $[-1;4]$ mit der x-Achse einschließt. #

3.3 Flächen zwischen Funktionsgraphen

Nun mag man einwenden, dass es ja ganz toll sein mag, wenn man solch komische Flächeninhalte, die drei gerade Seiten und eine krumme Seite haben, berechnen kann. Aber wo kommen bitte solche Figuren in der Realität vor?
Die gute Nachricht ist, dass wir mit unseren Methoden auch leicht sehr viel natürlichere Flächen berechnen können:

Beispiel 3.12 Die Umrisse eines Sees werden durch die Funktionen

$$f(x) = 0{,}125x^3 - 1{,}5x^2 + 4{,}875x - 0{,}5 \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{7}{12}x^2 - 3{,}75x + \frac{37}{6}$$

beschrieben (vgl. Abb. ??, alle Einheiten in Kilomtern). Wir wollen die Fläche des Sees berechnen, d.h., gesucht ist die Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen von f und g.
Zunächst berechnen wir die Schnittpunkte von f und g:

$$0{,}125x^3 - 1{,}5x^2 + 4{,}875x - 0{,}5 = \frac{7}{12}x^2 - 3{,}75x + \frac{37}{6}$$
$$0{,}125x^3 - \frac{25}{12}x^2 + 8{,}625x - \frac{20}{3} = 0$$

und mit dem TR folgt $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ und $x_3 \approx 10{,}67$. Damit:

$$F_1 = \int_1^3 0{,}125x^3 - 1{,}5x^2 + 4{,}875x - 0{,}5\,dx = \left[\frac{1}{32}x^4 - 0{,}5x^3 + 2{,}4375x^2 - 0{,}5x\right]_1^3 \approx 15{,}47 - 1{,}47 = 14$$

und

$$F_2 = \int_1^3 \frac{7}{12}x^2 - 3{,}75x + \frac{37}{6}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{7}{36}x^3 - 1{,}875x^2 + \frac{37}{6}x\right]_1^3 \approx 8{,}26 - 4{,}49 = 3{,}73$$

Damit ist die gesuchte Fläche also $F_1 - F_2 \approx 14 - 3{,}73 = 10{,}27$ Quadratkilometer groß. #

Insgesamt erhalten wir folgenden Satz:

Satz 3.13 Wenn f und g im Intervall $[a;b]$ keine Schnittpunkte haben, gilt

$$\text{orientierte Fläche zwischen } f(x) \text{ und } g(x) \text{ über } [a;b] = \int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$$

Beweis: Wenn f und g keine Schnittpunkte haben, muss einer der beiden Graphen komplett oberhalb des anderen Graphen liegen. Wir nehmen zunächst an, dass f über g liegt. Es sei A die gesuchte orientierte Fläche.

1. Fall: Beide Graphen liegen komplett oberhalb der x-Achse. In diesem Fall ist die gesuchte Fläche wie im vorangegangenen Beispiel gleich

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Fall: Mindestens einer der beiden Graphen hat eine Nullstelle. In diesem Fall verschieben wir die beiden Funktionen um ausreichend viele Schritte in y-Richtung (sagen wir: um m Schritte), sodass beide Graphen komplett oberhalb der x-Achse liegen. Die Fläche zwischen den Graphen ändert sich dadurch nicht. Nun können wir den ersten Fall anwenden und erhalten für die Fläche:

$$A = \int_a^b (f(x) + m) - (g(x) + m)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$$

□

Wir fassen das **Berechnen** von Flächeninhalten noch einmal zusammen:

Verfahren 3.14 (Operator **Berechnen**)

Gegeben: Fläche, begrenzt durch Funktionen f und g

Gesucht: Inhalt A der Fläche

Lösung: (1) Berechne ggf. die benötigten Funktionsgleichungen

(2) Berechne die Schnittpunkte der Funktionen (x-Koordinaten reichen!). Die Schnittpunkte unterteilen das Intervall in Teil-Intervalle.

(3) Für jedes Teil-Intervall: Berechne die orientierte Fläche zwischen den Funktionsgraphen mit der Formel $\int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x$, wobei a und b die Grenzen des jeweiligen Teil-Intervalls sind.

(4) Addiere die Beträge der Teil-Flächen zum Gesamt-Flächeninhalt.

Das **Bestimmen** von Flächeninhalten mit dem Taschenrechner ist sehr viel einfacher:

Verfahren 3.15 (Alle anderen Operatoren)

Gegeben: Fläche, begrenzt durch Funktionen f und g

Gesucht: Inhalt A der Fläche

Lösung: (1) Bestimme ggf. die benötigten Funktionsgleichungen

(2) Bestimme $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$ mit dem TR, wobei a und b die Grenzen des gesamten Intervalls sind.

Man benötigt also weder die Schnittpunkte, noch die Stammfunktion!

4 Deutung in Sachzusammenhängen

Die Berechnung von Flächeninhalten ist nur eine mögliche Anwendung von Integralen. Es gibt aber eine Vielzahl von Problemen, die mit Hilfe der Integralrechnung gelöst werden können. Der »Trick« besteht darin, als Hilfs-Wert den Mittelwert zu berechnen:

Verfahren 4.1

Gegeben: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Gesucht: Deutung des Wertes des Integrals

Lösung: (1) Berechne zunächst den Hilfswert

$$MW = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

(2) Deutung von MW: MW ist der mittlere Funktionswert im Bereich $[a;b]$.

(3) Nutze die Gleichung $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\cdot MW$ zur Deutung des Integrals.

Beispiel 4.2 Ein Künstler, der auf Honorarbasis arbeitet, hat kein festes Gehalt. Sein monatliches Gehalt im Jahr 2017 lässt sich näherungsweise durch die Funktion

$$g(t) = -0{,}003x^4 + 0{,}08x^3 - 0{,}662x^2 + 2x + 0{,}7$$

beschreiben, wobei t die Zeit in Monaten seit Jahresbeginn ist und $g(t)$ das Gehalt in Tausend Euro.

(a) Bestimmen Sie $\int\limits_0^{12} g(t)\,\mathrm{d}t$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

(b) Untersuchen Sie, in welchem Quartal (»Jahresviertel«) der Künstler am meisten verdient hat.

Lösung:

(a) Mit dem TR erhalten wir

$$\int\limits_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 36{,}51 \Rightarrow MW = \frac{36{,}51}{12} \approx 3{,}0424$$

Deutung: Im Durchschnitt hat der Künstler pro Monat etwa 3042 Euro verdient. Also ist $\int\limits_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t = 12\cdot MW \approx 36{,}51$ das gesamte Einkommen des Künstlers im Jahr 2017 (in Tausend Euro).

(b) Für das erste Quartal ($t = 0$ bis $t = 3$) erhalten wir ein mittleres Einkommen von

$$MW = \frac{1}{3} \cdot \int_0^3 g(t)\,\mathrm{d}t \overset{TR}{\approx} 2{,}2054$$

Also beträgt das Gesamt-Einkommen im ersten Quartal $3 \cdot MW \approx 6{,}6162$, d.h. $6616{,}20\,€$.
Für die anderen Quartale gehen wir genauso vor:

2. Quartal: $MW = \frac{1}{3} \cdot \int_3^6 g(t)\,\mathrm{d}t \approx 2{,}3914 \Rightarrow$ Einkommen $= 1000 \cdot 3 \cdot MW \approx 7174{,}2\,€$

3. Quartal: $MW = \frac{1}{3} \cdot \int_6^9 g(t)\,\mathrm{d}t \approx 2{,}8114 \Rightarrow$ Einkommen $= 1000 \cdot 3 \cdot MW \approx 8434{,}2\,€$

4. Quartal: $MW = \frac{1}{3} \cdot \int_9^{12} g(t)\,\mathrm{d}t \approx 4{,}7614 \Rightarrow$ Einkommen $= 1000 \cdot 3 \cdot MW \approx 14284{,}2\,€$

Das vierte Quartal war also das erfolgreichste.
Zur Probe: $6616 + 7174 + 8434 + 14284 = 36508$ ist der Gesamt-Verdienst in 2017 (siehe (a)).

#

5 Verkettete Funktionen

5.1 Ableiten mit Hilfe der Kettenregel

Wir haben nun fast alle Zutaten beisammen, um eine Vielzahl von Funktionstypen untersuchen zu können. Wie wir in vielen Beispielen gesehen haben, ist das Bilden der Ableitung (bzw. die Umkehrung davon, das Integrieren) bei dieser Untersuchung entscheidend. Was uns noch fehlt ist die sog. »Kettenregel«, die es erlaubt, die Ableitung äußerst komplexer Funktionen zu bestimmen, die ineinander eingesetzt sind:

Definition 5.1 *Eine Funktion der Form*

$$f(x) = a(i(x))$$

heißt **Verkettung** *der Funktionen a und i: Zuerst wird i angewendet und anschließend a auf das Ergebnis von i. a heißt* **äußere Funktion**, *i heißt* **innere Funktion**.

Beispiel 5.2 $a(x) = x^2$, $i(x) = 3 - x \Rightarrow a(i(x)) = a(3-x) = (3-x)^2$ #

Die Kunst besteht nun darin, komplizierte Funktionen als Verkettungen von einfachen Funktionen aufzufassen:

Beispiel 5.3

(a) $f(x) = \frac{1}{2}(4x^2 - 2)^5$ kann man auffassen als $f(x) = a(i(x))$ mit $a(x) = \frac{1}{2}x^5$ und $i(x) = 4x^2 - 2$.

(b) $f(x) = e^{-0{,}2x}$ kann man auffassen als $f(x) = a(i(x))$ mit $a(x) = e^x$ und $i(x) = -0{,}2x$.

(c) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ kann man auffassen als $f(x) = a(i(x))$ mit $a(x) = \sqrt{x}$ und $i(x) = 2x - 1$.

#

Verkettungen lassen sich mit Hilfe der Kettenregel ableiten:

Satz 5.4 Es gilt die **Kettenregel**

$$\big(a(i(x))\big)' = a'(i(x)) \cdot i'(x)$$

Die Multiplikation mit $i'(x)$ nennt man auch **Nachdifferenzieren mit der inneren Ableitung**.

Bevor wir die Regel beweisen, wenden wir sie zunächst einmal an:

Beispiel 5.5

(a) $f(x) = \frac{1}{2}(4x^2 - 2)^5$. Gesucht ist $f'(x)$. Die Kettenregel sagt nun:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}(4x^2-2)^5\right)' = \frac{5}{2}(4x^2-2)^4 \cdot (4x^2-2)' = \frac{5}{2}\left(4x^2-2\right)^4 \cdot 8x = 20x\,(4x-2)^4$$

(b) $f(x) = e^{-0{,}2x} \Rightarrow f'(x) = e^{-0{,}2x} \cdot (-0{,}2x)' = e^{-0{,}2x} \cdot (-0{,}2) = -0{,}2 \cdot e^{-0{,}2x}$

(c) $f(x) = \sqrt{2x-1} \Rightarrow f'(x) = \left((2x-1)^{0{,}5}\right)' = 0{,}5(2x-1)^{-0{,}5} \cdot (2x-1)' = 0{,}5(2x-1)^{-0{,}5} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

#

Bemerkung 5.6 Man kann also komplizierte Funktionen nach den »normalen Regeln« ableiten, muss dabei aber an das Nachdifferenzieren denken. #

Nun kommen wir zum Beweis der Kettenregel:

Beweis: Es geht um die Ableitung der Funktion $f(x) = a(i(x))$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(i(x+h))-a(i(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(i(x+h))-a(i(x))}{h} \cdot \frac{i(x+h)-i(x)}{i(x+h)-i(x)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(i(x+h))-a(i(x))}{i(x+h)-i(x)} \cdot \frac{i(x+h)-i(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a(i(x+h))-a(i(x))}{i(x+h)-i(x)} \cdot i'(x) \end{aligned}$$

Es geht also nur noch um den Term $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a(i(x+h))-a(i(x))}{i(x+h)-i(x)}$. Wir substituieren $z = i(x)$ und $h_1 = i(x+h) - i(x)$. Damit erhalten wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{a(i(x+h))-a(i(x))}{a(x+h)-i(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{a(z+h_1)-a(z)}{h_1}$$

Wenn h gegen 0 geht, dann geht auch $h_1 = g(x+h) - g(x)$ gegen 0 und dann geht $\frac{a(z+h_1)-a(z)}{h_1}$ gegen $a'(z)$.

Insgesamt erhalten wir also

$$\lim_{h\to 0} \frac{a(i(x+h))-a(i(x))}{i(x+h)-i(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{a(z+h_1)-a(z)}{h_1} = a'(z) = a'(i(x))$$

und damit mit Hilfe der ersten Rechnung

$$f'(x) = a'(i(x)) \cdot i'(x)$$

□

Beispiel 5.7 Wir diskutieren die Funktion $f(x) = e^{x^2}$:

(a) y-Achsenabschnitt: $f(0) = e^0 = 1$

(b) Nullstellen: $e^{x^2} = 0$ ↯ $\Rightarrow$ Es gibt keine Nullstellen

(c) Extrema: $f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 0 \iff e^{x^2} = 0$↯ $\vee\ 2x = 0 \iff x_1 = 0$
Steigung links von 0: $f'(-1) = e^{(-1)^2} \cdot 2 \cdot (-1) = -2e < 0 \Rightarrow$ fällt
Steigung rechts von 0: $f'(1) = e^{(1)^2} \cdot 2 \cdot 1 = 2e > 0 \Rightarrow$ steigt
Also ist $(0 \mid 1)$ ein Tiefpunkt.

#

5.2 Integrieren mit Hilfe der Substitutionsregel

Mit Hilfe der Kettenregel können auch verkettete Integrale bestimmt werden:

Satz 5.8 Es gilt die **Substitutionsregel** der Integralrechnung:

$$\int f(g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(z) \cdot \frac{1}{g'(x)}\,\mathrm{d}z$$

Anders formuliert: Eine Stammfunktion der verketteten Funktion $k(x) = f(g(x))$ erhält man folgendermaßen:

(a) Bilde Stammfunktion $H(z)$ von $h(z) = f(z) \cdot \frac{1}{g'(x)}$.

(b) Eine Stammmfunktion von $k(x)$ ist dann gegeben durch $K(x) = H(g(x))$.

Beweis: Da H eine Stammfunktion von h ist, gilt

$$H'(z) = h(z) = f(z) \cdot \frac{1}{g'(x)}$$

Damit folgt

$$K'(x) = (H(g(x)))' = H'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot \frac{1}{g'(x)} \cdot g'(x) = f(g(x))$$

□

Um die Anwendung der Substitutionsregel zu vereinfachen, verwendet man folgende Schreibweise:

Definition 5.9 *Wir bezeichnen die Ableitung der Funktion y nach der Variablen x mit $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.*

Beispiel 5.10 Wenn $y = 3x^4 - 3x$, dann gilt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 12x^3 - 3$. #

Damit kann man zur Bestimmung von Integralen folgendermaßen vorgehen:

Verfahren 5.11

Gegeben: Funktion f

Gesucht: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Lösung:

(1) Substituiere $z =$ Term mit x

(2) Berechne $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ und löse die Gleichung nach $\mathrm{d}x$ auf.

(3) Ersetze im Integral den »Term mit x« durch z und $\mathrm{d}x$ durch das Ergebnis von Schritt 2.

(4) Du erhältst ein neues Integral, das hoffentlich leichter zu lösen ist. Am Ende musst du resubstituieren, bevor du die Grenzen einsetzt!

Beispiel 5.12 Gesucht ist $\int\limits_1^5 3e^{-0{,}1x}\,\mathrm{d}x$.

(1) Wir substituieren $z = -0{,}1x$

(2) Damit erhalten wir $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -0{,}1 \Rightarrow -10 \cdot \mathrm{d}z = \mathrm{d}x$

(3) Damit:

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^5 3e^{-0{,}1x}\,\mathrm{d}x &= \int\limits_1^5 3e^z \cdot (-10)\,\mathrm{d}z \\
&= \int\limits_1^5 -30e^z\,\mathrm{d}z \\
&= [-30e^z]_1^5 \\
&= \left[-30e^{-0{,}1x}\right]_1^5 \\
&\approx -18{,}2 - (-27{,}1) = 8{,}9
\end{aligned}$$

#

Bei Anwendung der Substitutionsregel ist es meistens einfacher, die Grenzen des Integrals zunächst wegzulassen:

Definition 5.13 *Die Schreibweise*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

heißt **unbestimmtes Integral** *von f. Es steht für die Stammfunktionen der Funktion f.*

Beispiel 5.14

(a) $\int x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + C$

(b) $\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$

(c) $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$

#

Beispiel 5.15 Gesucht ist eine Stammfunktion von $f(x) = 3 \cdot e^{-0{,}1x}$. Mit der neuen Schreibweise können wir folgendermaßen rechnen:

$$\int 3 \cdot e^{-0{,}1x}\,\mathrm{d}x = \int 3 \cdot e^z \cdot (-10)\,\mathrm{d}z = \int -30 \cdot e^z\,\mathrm{d}z = -30e^z + C = -30e^{-0{,}1x} + C$$

wobei wir $z = -0{,}1x$ substituiert haben:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -0{,}1 \iff \mathrm{d}z = -0{,}1\,\mathrm{d}x \iff -10\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}x$$

Also ist $F(x) = -30e^{-0{,}1x}$ eine Stammfunktion von f. #

5.3 Integrieren per Formansatz

In diesem Abschnitt behandeln wir eine Alternative zur Substitutionsregel, mit der sich äußerst komplexe Funktionen relativ einfach integrieren lassen.
Die grundlegende Idee ist folgende: Die Ableitung einer Exponentialfunktion ist wieder eine Exponentialfunktion. Daher liegt die Vermutung nahe, dass die Ableitung einer Funktion, die eine Exponentialfunktion enthält, wieder so ähnlich aussieht wie die Funktion selbst. Damit würde aber auch eine Stammfunktion prinzipiell dieselbe Form aufweisen.

Verfahren 5.16 (Integration durch Formansatz)

Gegeben: Funktion f

Gesucht: Stammfunktion F von f

Lösung:

(1) Ansatz: $F(x)$ = Funktionsterm wie $f(x)$, aber mit Variablen statt Zahlen

(2) Bilde $F'(x)$ und vergleiche mit $f(x)$.

(3) Daraus erhältst du Gleichungen für die Variablen. Bestimme die Variablen für $F(x)$.

(4) Gib die Gleichung von F an.

(5) Zeige durch Ableiten, dass F tatsächlich eine Stammfunktion von f ist.

Beispiel 5.17 Gesucht ist eine Stammfunktion von $(x^2-2)\cdot e^{4x}$. f hat die Form

$$f(x) = (\text{Polynom 2. Grades})\cdot e^{4x}$$

(1) Ansatz: $F(x) = (ax^2+bx+c)\cdot e^{4x}$

(2) Ableitung bilden und mit $f(x)$ vergleichen:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (2ax+b)\cdot e^{4x} + (ax^2+bx+c)\cdot e^{4x}\cdot 4 \\ &= (2ax+b)\cdot e^{4x} + (4ax^2+4bx+4c)\cdot e^{4x} \\ &= \left[(4a)x^2+(2a+4b)x+(b+4c)\right]\cdot e^{4x} \\ &\overset{!}{=} (1x^2+0x-2)\cdot e^{4x} \end{aligned}$$

(3) Bestimme nacheinander die Unbekannten a, b und c:

(1) Der Faktor vor x^2 muss gleich sein: $4a = 1 \iff a = \frac{1}{4}$

(2) Der Faktor vor x muss gleich sein: $2\cdot\frac{1}{4}+4b = 0 \iff b = -\frac{1}{8}$

(3) Die Konstante muss gleich sein: $-\frac{1}{8}+4c = -2 \iff c = -\frac{15}{32}$

(4) Insgesamt: $F(x) = (\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{15}{32})\cdot e^{4x}$

(5) Probe durch Ableiten:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (\frac{1}{2}x-\frac{1}{8})\cdot e^{4x} + (\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x-\frac{15}{32})\cdot e^{4x}\cdot 4 \\ &= (\frac{1}{2}x-\frac{1}{8})\cdot e^{4x} + (x^2-\frac{1}{2}x-\frac{15}{8})\cdot e^{4x} \\ &= (\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}+x^2-\frac{1}{2}x-\frac{15}{8})\cdot e^{4x} \\ &= (x^2-\frac{16}{8})\cdot e^{4x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

#

6 Funktionenscharen

Die meisten Formeln enthalten mehrere Variablen, z.B.

(a) der Oberflächeninhalt eines Quaders mit den Kantenlängen a, b und c: $O = 2ab + 2ac + 2bc$

(b) der Umfang eines Rechtecks mit Seitenlängen a und b: $U = 2(a + b)$

(c) die Größe einer Kaninchen-Population ist nicht nur abhängig von der Zeit, sondern auch von der Anzahl der Füchse und anderer Jäger

Aus diesem Grund reicht es nicht mehr aus, eine einzelne Funktion zu untersuchen, sondern man muss parallel unendlich viele Funktionen analysieren:

Definition 6.1 *Eine* **Funktionenschar** *wird durch eine Funktionsgleichung definiert, die neben der Unbekannten x (bzw. t) eine oder mehrere weitere Variablen enthält, die* **Parameter** *genannt werden.*
Man schreibt die Parameter als Index an den Namen der Funktion, also z.B. $f_a(x)$, wenn die Schar einen Parameter namens a besitzt oder $f_{u,v}(x)$, wenn die Schar die zwei Parameter u und v besitzt.

Beispiel 6.2 Für den Oberflächeninhalt eines Quaders (s.o.) erhält man z.B. die Funktionenschar

$$f_{a,b}(x) = 2ax + 2bx + 2ab = (2a + 2b)x + 2ab$$

während man für den Umfang eines Rechtecks die Funktionenschar

$$f_a(x) = 2(a + x) = 2x + 2a$$

erhalten würde.

#

Funktionenscharen können mit unseren »ganz normalen« Methoden untersucht werden, es besteht allerdings die Schwierigkeit, dass man keine konkreten Zahlen mehr als Ergebnis erhält, sondern Formeln, die wiederum von den Parametern abhängen. Die wichtigste Regel lautet:

Satz 6.3 Der bzw. die Parameter einer Funktionenschar gelten im Bezug auf Ableiten und Integrieren als konstante Zahlen. Beim Integrieren muss darauf geachtet werden, nach welcher Variablen integriert wird!

Beispiel 6.4 Die Größe einer Kaninchen-Population (in Vielfachen von 100), zum Zeitpunkt t in Jahren, wird durch die Funktionenschar

$$k_f(t) = 0{,}25t^3 - 3f \cdot t^2 + 10$$

beschrieben. Dabei steht der Parameter $f > 0$ für die Anzahl der Füchse (in Vielfachen von 100) bei Beginn der Beobachtung.

(a) Berechnen Sie die Extrema und die Wendepunkte der Schar in Abhängigkeit von f.

(b) Bestimmen Sie den Wert für f, ab dem die Population aussterben wird.

(c) Berechnen Sie die durchschnittliche Anzahl Kaninchen im Zeitraum $t = 1$ bis $t = 3$ in Abhängigkeit von f.

(d) Für genau eine Kurve der Schar gilt $\int_0^4 k_f(t)\,\mathrm{d}t = 8$. Berechnen Sie den Wert des Parameters f.

(e) Berechnen Sie $\frac{1}{5}\int_0^5 k_f(t)\,\mathrm{d}f$ für $t = 1$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Mögliche Lösung:

(a) Extrema und WP:

(1) Ableitungen:

- $k_f{}'(t) = 0{,}75t^2 - 6ft = t(0{,}75t - 6f)$
- $k_f{}''(t) = 1{,}5t - 6f$
- $k_f{}'''(t) = 1{,}5$

(2) Extrema:

- $k_f{}'(t) = 0 \iff t_1 = 0 \vee 0{,}75t - 6f = 0 \iff t = 8f$
- $y_1 = k_f(0) = 10$
- $y_2 = k_f(8f) = 0{,}25 \cdot (8f)^3 - 3 \cdot f \cdot (8f)^2 + 10 = 128f^3 - 192f^3 + 10 = -64f^3 + 10$
- Art von $t_1 = 0$: $k_f{}''(0) = -0{,}06f < 0$ (da $f > 0$) $\Rightarrow$ HP $(0 \mid 10)$
- Art von $t_2 = 0{,}08f$: $k_f{}''(0{,}08f) = 1{,}5 \cdot 0{,}08f - 0{,}06f = 0{,}06f > 0$ (da $f > 0$) $\Rightarrow$ TP $(0{,}08f \mid -64f^3 + 10)$

(3) Wendepunkte:

(1) $k_f''(t) = 0 \iff 0 \iff 1{,}5t = 6f \iff t_1 = 4f$

(2) $y_1 = k_f(4f) = 0{,}25 \cdot (4f)^3 - 3 \cdot f \cdot (4f)^2 + 10 = 16f^3 - 48f^3 + 10 = -24f^3 + 10$

(3) Art von $t_1 = 4f$: $k_f'''(4f) = 1{,}5 > 0 \Rightarrow$ (Rechts-Links-)Wendepunkt $(4f \mid -24f^3 + 10)$

(b) Die Population wird aussterben, wenn die Schar eine positive Nullstelle hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Tiefpunkt im negativen y-Bereich liegt, also wenn $-64f^3 + 10 < 0$. Wir lösen die Gleichung $-64f^3 + 10 = 0 \iff 10 = 64f^3 \iff f = \sqrt[3]{10/64} \approx 0{,}54$. D.h., ab ca. 54 Füchsen werden die Kaninchen aussterben.

(c) $MW = \frac{1}{2} \int\limits_1^3 0{,}25t^3 - 3ft^2 + 10\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{16}t^4 - ft^3 + 10t\right]_1^3 \approx \frac{1}{2}[\frac{81}{16} - 27f + 30 - (\frac{1}{16} - f + 10)] = \frac{1}{2} \cdot [5 - 26f + 20] = 12{,}5 - 13f$

(d) Ansatz: $\int\limits_0^4 k_f(t)\,\mathrm{d}t = 8$, d.h.

$$8 = \left[\frac{1}{16}t^4 - ft^3 + 10t\right]_0^4 = 16 - 64f + 40 = 56 - 64f \iff 64f = 48 \iff f = 0{,}75$$

Natürlich hätte man auch das Ergebnis aus dem Aufgabenteil davor verwenden können.

(e) Achtung, hier wird nach f integriert!

$$\frac{1}{5} \int\limits_0^5 0{,}25 - 3f + 10\,\mathrm{d}f = \frac{1}{5} \cdot \left[10{,}25f - 1{,}5f^2\right]_0^5 = 10{,}25 - 7{,}5 = 2{,}75$$

Deutung (schwierig!): Wenn es zu Beobachungsbeginn zwischen 0 und 500 Füchse gab, sind im Schnitt nach einem Jahr noch 275 Kaninchen vorhanden. #

III

Analytische Geometrie & lineare Algebra

1 Lineare Gleichungssysteme

In der Mathematik bezeichnet man die Theorie der linearen Gleichungssysteme als »Lineare Algebra«. Alle nachfolgenden Kapitel bauen darauf auf, daher werden wir in diesem Kapitel diese linearen Gleichungssysteme untersuchen.

1.1 Definition und Matrixschreibweise

Definition 1.1

(a) Ein **Lineares Gleichungssystem** *(kurz:* **LGS***) besteht aus einer Sammlung von linearen Gleichungen mit einer gewissen Anzahl von* **Unbekannten** x, y, z, *....*

(b) Eine Belegung dieser Unbekannten derart, dass alle Gleichungen gleichzeitig erfüllt sind, heißt **Lösung** *des LGS.*

(c) Die **Lösungsmenge** *besteht aus allen Lösungen des LGS.*

Aus der Mittelstufe ist folgendes bekannt:

Satz 1.2 Jedes LGS kann mit Hilfe des **Gleichsetzungs-**, **Einsetzungs-** oder **Additionsverfahrens** gelöst werden (bekannt aus der Mittelstufe).

Beispiel 1.3

(a) Gegeben ist das LGS

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 3 \\ 7z &= 23 + 4y \\ 25x + 2y &= 8z \end{aligned}$$

Dann ist $(x = 1, y = -\frac{1}{2}, z = 3)$ eine Lösung und man kann zeigen, dass es die einzige Lösung ist (Übung!). Es gilt also

$$\mathbb{L} = \{(x = 1, y = -\frac{1}{2}, z = 3)\}$$

(b) Gegeben ist das LGS

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x - y + 2z &= -1 \end{aligned}$$

Dann ist $(x = 1, y = 2, z = 0)$ eine Lösung, genauso aber auch $(x = -5, y = 4, z = 4)$ und $(x = 7, y = 0, z = -4)$. Wie findet man hier die Lösungsmenge? Dazu später mehr!

#

Für den kompetenten Umgang mit Gleichungssystemen ist es wichtig, eine vereinfachende und übersichtlichere Schreibweise zu verwenden:

Definition 1.4 *Anstatt die Gleichungen eines LGS voll auszuschreiben, schreibt man nur die* **Koeffizienten** *der Gleichungen (das sind die Faktoren vor den Variablen) in eine sog.* **Matrix** *(eine Art Tabelle). Dazu müssen zunächst alle Gleichungen so umgestellt werden, dass die Variablen auf der linken Seite stehen und die Zahlen ohne Variable auf der rechten.*
In der ersten Spalte stehen also die Faktoren, die zur ersten Unbekannten gehören, in der zweiten Spalte die, die zur zweiten Unbekannten gehören usw.

Beispiel 1.5 Wir schreiben die beiden LGS'se aus dem vorangegangenen Beispiel um:

(a)

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 3 \\ 7z &= 23 + 4y \\ 25x + 2y &= 8z \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} 4x + 2y &= 3 \\ -4y + 7z &= 23 \\ 25x + 2y - 8z &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & = & 3 \\ 0 & -4 & 7 & = & 23 \\ 25 & 2 & -8 & = & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x - y + 2z &= -1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & = & 3 \\ 1 & -1 & 2 & = & -1 \end{pmatrix}$$

#

1.2 Das Gauß-Verfahren

Das Lösen von linearen Gleichungssystem wurde im Prinzip bereits in der Mittelstufe behandelt. Sobald die Gleichungssysteme aber eine gewisse Größe erreichen, wird die Wahrscheinlichkeit, sich an irgendeiner Stelle zu verrechnen, sehr groß. Daher benötigt man ein systematisches (man könnte auch sagen: stupides) Verfahren, das sich (laut seinem Erfinder Carl Friedrich Gauß) »halb im Schlafe ausführen lässt«.
Die Grund-Idee ist zunächst die folgende:

Satz 1.6 Ein LGS, bei dem alle Einträge unterhalb der **Diagonalen** (die Diagonale beginnt oben links in der Matrix) gleich 0 sind, kann direkt »rückwärts« gelöst werden.

Beispiel 1.7 Wir lösen das LGS

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & = & 11 \\ 0 & 3 & 2 & = & -5 \\ 0 & 0 & -5 & = & 20 \end{pmatrix}$$

- Die letzte Zeile bedeutet: $-5z = 20 \iff z = z = -4$
- Die mittlere Zeile bedeutet: $3y + 2z = -5 \overset{z=-4}{\iff} 3y - 8 = -5 \iff y = 1$
- Die erste Zeile bedeutet: $2x + y - z = 11 \overset{y=1,z=-4}{\iff} 2x + 1 + 4 = 11 \iff x = 3$

Also erhalten wir die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(x = 3, y = 1, z = -4)\}$ #

Verfahren 1.8

Gegeben: LGS in Matrix-Form

Gesucht: Lösungsmenge des LGS

Lösung:

(1) Sortiere die Zeilen oder Spalten der Matrix so um, dass oben links eine Zahl $\neq 0$ steht.

(2) Multipliziere oder dividiere alle Zeilen so, dass der der Eintrag in der ersten Spalte genau das Negative der Zahl oben links ist.

(3) Addiere die erste Zeile auf alle anderen Zeilen (außer die, die bereits eine 0 in der ersten Spalte haben). Wenn du alles richtig gemacht hast, stehen nun unterhalb des Eintrags oben links nur noch Nullen.

(4) Wiederhole nun das Verfahren für die restliche Matrix ohne die erste Zeile und die erste Spalte bis unterhalb der Diagonalen der Matrix nur noch Nullen stehen.

(5) Löse die Gleichungen nun »von unten nach oben«.

Beispiel 1.9 Wir lösen die beiden LGS'se aus dem Beispiel:

(a)

Eintrag oben links

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & 23 \\ 25 & 2 & -8 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \cdot 25 \\ \\ \cdot(-4) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 50 & 0 & 75 \\ 0 & -4 & 7 & 23 \\ -100 & -8 & 32 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} :25 \\ \oplus \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & 23 \\ 0 & 42 & 32 & 75 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot 21 \\ \cdot 2 \end{array}$$

restliche Matrix

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -84 & 147 & 483 \\ 0 & 84 & 64 & 150 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \oplus\ :21 \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 7 & 23 \\ 0 & 0 & 211 & 633 \end{array}\right)$$

nur Nullen unterhalb der Diagonalen

Die letzte Zeile sagt: $211z = 633 \iff z = 3$.
Die mittlere Zeile sagt: $-4y + 7z = 23 \overset{z=3}{\iff} -4y + 21 = 23 \iff -4y = 2 \iff y = -\frac{1}{2}$
Die erste Zeile sagt: $4x + 2y = 3 \overset{y=-\frac{1}{2}}{\iff} 4x - 1 = 3 \iff 4x = 4 \iff x = 1$
Insgesamt: $\mathbb{L} = \{(x = 1, y = -\frac{1}{2}, z = 3)\}$

(b)

Eintrag oben links

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)\cdot(-1) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)\oplus \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

nur Nullen unterhalb der Diagonalen

Hier haben wir für z »keine Gleichung mehr übrig«. Also setzen wir einfach $\boxed{z = t}$ (t steht für eine beliebige reelle Zahl). Damit können wir dann die restlichen Gleichungen lösen:
Letzte Zeile: $2y - z = 4 \Rightarrow 2y = 4 + z \Longrightarrow 2y = 4 + t \Rightarrow \boxed{y = 2 - 0{,}5t}$
Erste Zeile: $x + y + z = 3 \Rightarrow x = 3 - y - z \Rightarrow x = 3 - (2 - 0{,}5t) - t \Rightarrow \boxed{x = 1 - 0{,}5t}$
Insgesamt: $\mathbb{L} = \{(x = 1 - 0{,}5t,\ y = 2 - 0{,}5t,\ z = t)\,|\,t \in \mathbb{R}\}$
Das bedeutet, dass wir für jede reelle Zahl t eine andere Lösung des LGS erhalten (für $t = 0$ z.B. $x = 1$, $y = 2$, $z = 0$, für $t = -2{,}5$ z.B. $x = 2{,}25$, $y = 3{,}25$, $z = -2{,}5$). Das LGS hat also unendlich viele Lösungen!
Wir kommen im nächsten Abschnitt noch einmal darauf zurück.

#

1.3 Besondere Lösungsmengen

Gleichungssysteme müssen nicht immer eine einzige Lösung haben:

Beispiel 1.10

(a) Das LGS

$$x + y = 3$$
$$x + y = 4$$

hat offensichtlich keine Lösung.

(b) Das LGS

$$x + y = 3$$
$$x + y = 3$$

hat unendlich viele Lösungen, denn jede Kombination $(x = \text{beliebig}, y = 3 - x)$ ist eine Lösung, also z.B. $(x = 0, y = 3)$, $(x = 1, y = 2)$, $(x = -0{,}5, y = 3{,}5)$.

#

Das Tolle am Gauß-Verfahren ist nun, dass man während der Anwendung des Verfahrens bemerkt, wie viele Lösungen vorliegen:

Beispiel 1.11 Wir wenden das Gaußverfahren auf die beiden Gleichungssysteme an:

(a)

$$\begin{matrix} x+y=3 \\ x+y=4 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \cdot(-1) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -4 \end{array}\right) \oplus \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

(b)

$$\begin{matrix} x+y=3 \\ x+y=3 \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \cdot(-1) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{array}\right) + \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

In beiden Fällen erkennen wir »auf einen Blick«, wie viele Lösungen es gibt:
In (a) kann die letzte Zeile nicht erfüllt werden, daher kann es keine Lösung geben.
In (b) ist die letzte Zeile automatisch erfüllt, daher kann man sie weglassen. Daher bleibt nur die erste Zeile übrig. Eine Gleichung reicht aber nicht aus, um zwei Variablen »festzunageln«. Daher gibt es unendlich viele Lösungen. #

Wir halten zunächst einmal folgende Erkenntnisse fest:

Satz 1.12

(a) Eine Zeile der Form $(0\;0\;\dots\;0\;\mid\;0)$ kann man aus dem LGS herausstreichen.

(b) Eine Zeile der Form $(0\;0\;\dots\;0\;\mid\;c)$ mit $c \neq 0$ bedeutet, dass das LGS keine Lösung hat.

(c) Ein LGS mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat stets unendlich viele Lösungen, es sei denn Fall (b) trifft zu (dann hat es keine Lösung).

Beweis:

(a) Eine solche Zeile $(0\;0\;\dots\;0\;\mid\;0)$ bedeutet

$$0x + 0y + \dots + 0z = 0$$

Diese Gleichung ist aber unabhängig von den Variablen immer erfüllt. Daher kann man sie weglassen.

(b) Eine solche Zeile $(0\;0\;\dots\;0\;\mid\;c)$ mit $c \neq 0$ bedeutet

$$0x + 0y + \dots + 0z = c$$

und diese Gleichung kann unabhängig von den Variablen niemals erfüllt werden. Daher gibt es keine Lösung.

(c) In jedem Schritt des Gaußverfahrens eliminiert man eine Variable und die restliche Matrix hat eine Zeile weniger. Wenn das LGS weniger Gleichungen als Unbekannte hat, bleiben in der letzten Gleichung noch zwei oder mehr Unbekannte übrig. Daher kann man das Ergebnis nicht eindutig ausrechnen.

$\square$

Für aufgetretenen Phänomene gibt es noch einige Bezeichnungen:

Definition 1.13 *Eine Zeile der Form* $(0\;0\;\dots\;0\;\mid\;0)$ *heißt* **trivial***, andernfalls* **nicht-trivial***.*
Ein LGS heißt...

(a) **unterbestimmt***, falls es mehr Unbekannte hat als (nicht-triviale) Gleichungen.*

(b) **überbestimmt***, falls es mehr (nicht-triviale) Gleichungen als Unbekannte hat.*

Abschließend geht es darum, wie man unendliche Lösungsmengen beschreiben und bestimmen kann:

Verfahren 1.14 (Bestimmung einer unendlichen Lösungsmenge)

Gegeben: LGS mit unendlich vielen Lösungen

Gesucht: Lösungsmenge $\mathbb{L}$

Lösung: (1) Führe das Gaußverfahren durch.

(2) Löse die Dreiecksgestalt »ganz normal« rückwärts auf, um die Variablen zu berechnen. Führe für jede Variable, für die keine Gleichung mehr da ist, eine neue Variable ein.

Beispiel 1.15 Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x - y + 2z &= 2 \\ x + 2y - z &= -1 \\ 5x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Mit dem Gaußverfahren erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cccc} 4 & -1 & 2 & = & 2 \\ 1 & 2 & -1 & = & -1 \\ 5 & 1 & 1 & = & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \cdot(-20) \\ \cdot(-4) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 20 & -5 & 10 & = & 10 \\ -20 & -40 & 20 & = & 20 \\ -20 & -4 & -4 & = & -4 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 20 & -5 & 10 & = & 10 \\ 0 & -45 & 30 & = & 30 \\ 0 & -9 & 6 & = & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} :5 \\ :15 \\ :(-3) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 4 & -1 & 2 & = & 2 \\ 0 & -3 & 2 & = & 2 \\ 0 & 3 & -2 & = & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc} 4 & -1 & 2 & = & 2 \\ 0 & -3 & 2 & = & 2 \\ 0 & 0 & 0 & = & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 4x = 2 + y - 2z = 2 + (-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}t) - 2t = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}t \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t} \\ \Rightarrow -3y = 2 - 2z = 2 - 2t \Rightarrow \boxed{y = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}t} \\ \boxed{z = t} \end{array}$$

Also ist

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t,\ y = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}t,\ z = t \right) \middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Das heißt: Für jede reelle Zahl t erhalten wir eine konkrete Lösung des LGS, z.B. für $t = 2$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{1}{3} \\ y &= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} \\ z &= 2 \end{aligned}$$

und für $t = 1$: $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$. #

2 Vektoren

2.1 Das dreidimensionale Koordinatensystem

Das Haupt-Anliegen der analytischen Geometrie ist das Rechnen im dreidimensionalen Raum:

Definition 2.1

(a) *Ein* **dreidimensionales Koordinatensystem** *besteht aus drei Koordinatenachsen (x-, y- und z-Achse, manchmal auch x_1-, x_2- und x_3-Achse, die paarweise aufeinander senkrecht stehen. Der gemeinsame Schnittpunkt aller drei Achsen heißt* **(Koordinaten-)Ursprung** *und wird mit 0 bezeichnet.*

(b) *Normalerweise zeichnet man ein solches System folgendermaßen: Die y-Achse verläuft von links nach rechts, die z-Achse von unten nach oben und die x-Achse im $45°$-Winkel von hinten rechts nach vorne links (vgl.* **Abb. 12***). Die Einheiten der Achsen markiert man anhand der Kästchen (1 Kästchen entspricht 1 Einheit).*

(c) *Jeder* **Punkt** *im dreidimensionalen Koordinatensystem kann durch die Angabe von 3 Koordinaten $(x \mid y \mid z)$ eindeutig beschrieben werden.*

(d) *Der Teil des Koordinatensystems, der von der x- und der y-Achse gebildet wird, heißt x-y-Ebene. Entsprechend gibt es die x-z-Ebene und die y-z-Ebene (vgl.* **Abb. 13***). Diese drei Ebenen werden auch* **Koordinatenebenen** *genannt.*

Bemerkung 2.2 Natürlich kann man ein solches Koordinatensystem auch ganz anders zeichnen. Der Vorteil bei dieser Festlegung besteht allerdings darin, dass die x-y-Ebene den »Erdboden« bildet und die z-Achse senkrecht nach oben zeigt. #

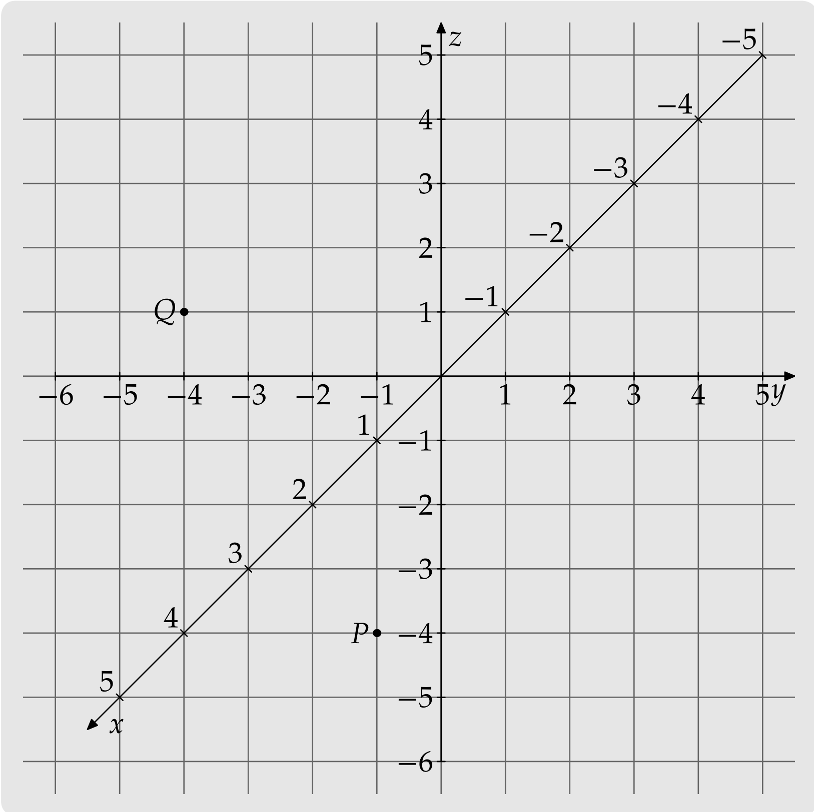


Abbildung 12 Ein dreidimensionales Koordinatensystem auf kariertem Papier. Darin sind die Punkte $P = (3 \mid 2 \mid -1)$ und $Q = (4 \mid 0 \mid 5)$ markiert.

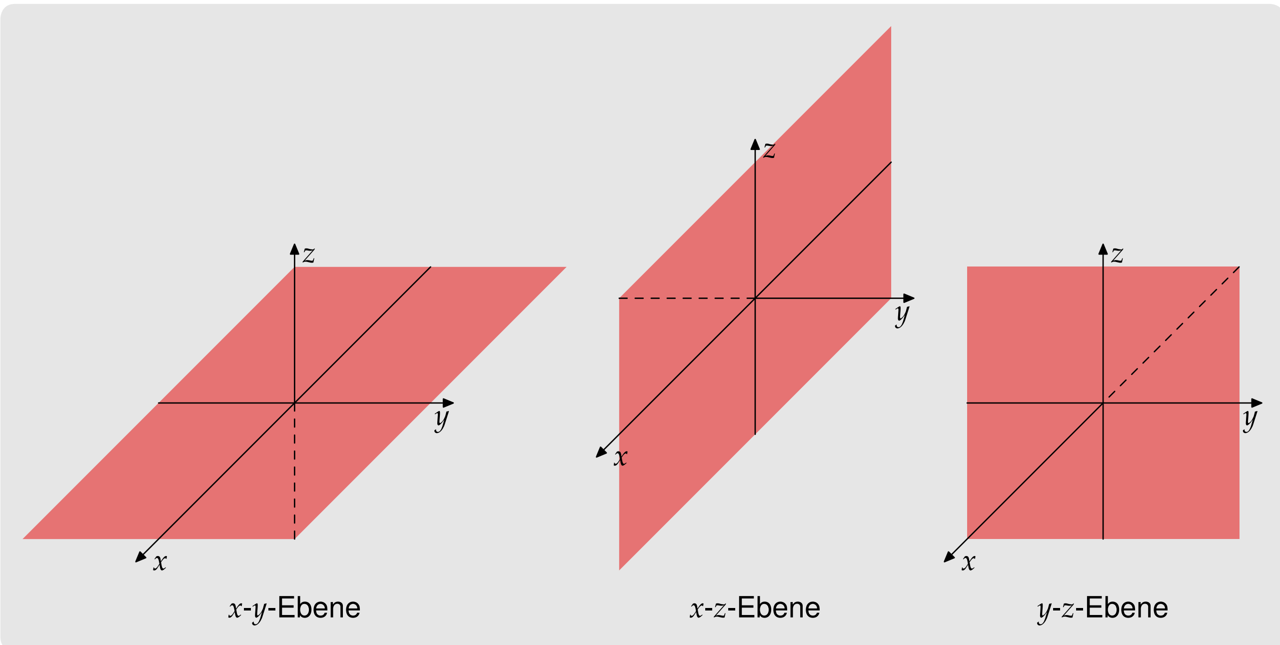


Abbildung 13 Die drei Koordinatenebenen. Man stelle sich jeweils vor, dass eine der Achsen senkrecht aus der roten Ebene herausragt.

2.2 Vektoren

Sinn und Zweck der analytischen Geometrie ist, Punkte im dreidimensionalen Raum berechenbar zu machen. Da man aber Punkte nicht sinnvoll miteinander verrechnen kann, werden als Hilfsmittel sog. »Vektoren« verwendet:

Definition 2.3

(a) *Eine Verschiebung wird auch als* **Vektor** *bezeichnet.*

(b) *Ein Vektor wird grafisch als Pfeil dargestellt. Dabei ist es egal, wie man den Angriffspunkt des Vektors wählt: Zwei Pfeile mit gleicher Länge und gleicher Richtung gehören zum gleichen Vektor.*

(c) *Der Vektor $\vec{v}$, der um x Schritte in x-Richtung, um y Schritte in y-Richtung und um z Schritte in z-Richtung verschiebt, wird als $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ geschrieben. Die Zahlen x, y und z heißen* **Komponenten** *des Vektors.*

(d) *Der Vektor, der den Punkt A auf den Punkt B verschiebt, wird mit $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet.*

(e) *Der Vektor, der überhaupt nichts verschiebt (alles bleibt an seinem Platz), heißt* **Nullvektor** *und wird mit $\vec{0}$ bezeichnet.*

(f) *Der Vektor $\overrightarrow{0P}$, der den Nullpunkt auf den Punkt P verschiebt, heißt* **Ortsvektor** *des Punktes P.*

Beispiel 2.4 Gegeben sind die Punkte $A = (1 \mid 3 \mid 2)$, $B = (2 \mid 5 \mid 5)$ und $C = (-1 \mid 7 \mid 5)$. Dann gilt

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Ortsvektoren von A, B und C sind:

$$\overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{0B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{0C} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

#

2.3 Vervielfachen von Vektoren

Definition 2.5 *Wir definieren das c-fache eines Vektors als*

$$c \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x \\ c \cdot y \\ c \cdot z \end{pmatrix}$$

Satz 2.6 Das Ver-c-fachen eines Vektors bedeutet, dass die Verschiebung c mal angewendet wird. Ist $c < 0$, so wird die Richtung des Vektors umgedreht.
Insbesondere gilt $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} = (-1) \cdot \overrightarrow{BA}$.

Beweis: Vgl. Abb. ??. □

Satz 2.7 Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind genau dann **parallel**, wenn sie Vielfache voneinander sind.

Beispiel 2.8 Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ parallel zueinander sind.

(a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung:

(a) $c \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow c = 1{,}5 \\ \Rightarrow c = 1{,}5 \\ \Rightarrow c = 1{,}5 \end{matrix}$
Also sind die Vektoren parallel.

(b) $c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow c \text{ beliebig} \\ \Rightarrow c = -9 \\ \Rightarrow c = -9 \end{matrix}$
Also sind die Vektoren parallel.

(c) $c \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow c = 2 \\ \Rightarrow c = 2 \\ \Rightarrow c = 1{,}5 \end{matrix}$
Also sind die Vektoren nicht parallel.

#

2.4 Addition und Subtraktion von Vektoren

Man kann Vektoren komponentenweise addieren und subtrahieren:

Definition 2.9 *Wir definieren die Summe/Differenz zweier Vektoren durch*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \pm w_1 \\ v_2 \pm w_2 \\ v_3 \pm w_3 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir folgenden Satz:

Satz 2.10

(a) $\overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ für jeden Punkt $A = (a \mid b \mid c)$.
Das heißt: Die Komponenten des Ortsvektors und die Koordinaten des zugehörigen Punkt sind gleich.

(b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A}$
Das heißt: Man erhält den Verbindungsvektor zweier Punkte, indem man die Ortsvektoren subtrahiert.

(c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$
Das heißt: Das Addieren zweier Vektoren entspricht der Hintereinanderausführung der beiden Verschiebungen. Außerdem: Beim Verschieben kann man beliebige »Umwege« gehen.

Beweis:

(a) Um den Punkt $0 = (0 \mid 0 \mid 0)$ auf den Punkt $A = (a \mid b \mid c)$ zu verschieben, muss man die x-Koordinate um a ändern, die y-Koordinate um b und die z-Koordinate um c.

(b) Wenn man $A = (a_1 \mid a_2 \mid a_3)$ auf $B = (b_1 \mid b_2 \mid b_3)$ abbilden will, muss man um $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ verschieben.

(c) Nach Teil (b) gilt

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0C} - \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0C} = \overrightarrow{0B} - \overrightarrow{0A} = \overrightarrow{AB}$$

□

Beispiel 2.11 Gegeben sind die Vektoren $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AF}=\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{ED}=\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FC}=\begin{pmatrix}8\\-2\\-1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{FD}=\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die Vektoren

(a) $\overrightarrow{AC}$ (b) $\overrightarrow{EC}$ (c) $\overrightarrow{BE}$

Wir suchen jeweils einen Weg vom Startpunkt zum Endpunkt über bekannte Vektoren:

(a) Wir gehen den Weg $A \to F \to C$: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}=\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\\0\end{pmatrix}$

(b) Wir gehen von $E \to D \to F \to C$: $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{ED}+(-\overrightarrow{FD})+\overrightarrow{FC}=\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\-2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\-5\\-10\end{pmatrix}$

(c) Wir gehen von $B \to A \to F \to D \to E$: $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FD}-\overrightarrow{ED}=-\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\3\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\6\\8\end{pmatrix}$

#

2.5 Längen

In diesem Abschnitt leiten wir Formeln her für die Lösung elementar-geometrischer Probleme.

Definition 2.12

(a) Wir bezeichnen die **Länge** *des Vektors $\vec{v}$ mit $|\vec{v}|$.*

(b) Wir bezeichnen den **Winkel** *zwischen den Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ mit $\sphericalangle(\vec{v},\vec{w})$*

(c) Wir bezeichnen den **Flächeninhalt** *einer geometrischen Figur mit $A(\ldots)$.*

Bevor wir sehen, wie wir diese Dinge berechnen können, benötigen wir eine neue Rechenart:

Definition 2.13 *Wir bezeichnen*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

als ***Skalarprodukt*** *der beiden Vektoren.*

Satz 2.14 Es gilt

(a) $\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (Satz des Pythagoras in 3D)

(b) $\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} * \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$ (Kosinussatz in 3D)

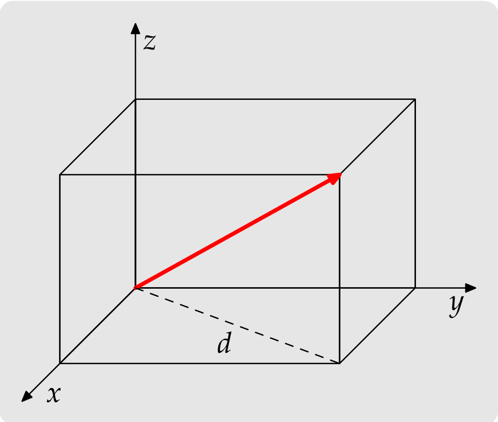
(c) $A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin(\alpha)$ (Flächeninhalt des Dreiecks in 3D)

wobei $\alpha = \sphericalangle(\vec{v}, \vec{w})$.

Beweis:

(a)

Wir denken uns ein dreidimensionales Koordinatensystem und darin den Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Dieser Vektor ist dann die Raumdiagonale eines Quaders mit den Seitenlängen x, y und z (vgl. Abbildung rechts).



Wir zeichnen nun noch die Diagonale d in der x-y-Ebene ein. Aufgrund des Satz des Pythagoras gilt dann $d^2 = x^2 + y^2$. Diese Diagonale bildet aber zusammen mit der Seite z und der gesuchten Raumdiagonalen $|\vec{v}|$ wiederum ein rechtwinkliges Dreieck, also gilt der Satz des Pythagoras noch einmal: $|\vec{v}|^2 = d^2 + z^2$. Wenn wir nun die erste Gleichung für d^2 einsetzen, erhalten wir

$$|\vec{v}|^2 = d^2 + z^2 = (x^2 + y^2) + z^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(b) Wir nennen die Koordinaten von $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und von $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$. Wir bezeichnen die Seitenlängen im Dreieck ABC wie gewohnt mit a, b und c. Aus der Mittelstufe wissen wir, dass der Kosinussatz gilt. Dieser sagt z.B.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \Rightarrow 2bc\cos(\alpha) = b^2 + c^2 - a^2 \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Nach Teil (a) wissen wir, dass

$$\begin{aligned} c^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ b^2 &= |\overrightarrow{AC}|^2 = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 \end{aligned}$$

Wenn wir dies in die obige Formel einsetzen, erhalten wir

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Nun kommt der wirklich knifflige Teil: Es gilt $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix} -v_1 + w_1 \\ -v_2 + w_2 \\ -v_3 + w_3 \end{pmatrix}$. Warum? Dieser Vektor soll den Punkt B auf den Punkt C verschieben. Statt dies auf direktem Wege zu tun, kann man auch zunächst B um $\overrightarrow{AB}$ *rückwärts* verschieben und anschließend um $\overrightarrow{AC}$.
Damit folgt

$$\begin{aligned} a^2 &= |\overrightarrow{BC}|^2 = (w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2 + (w_3 - v_3)^2 \\ &= w_1^2 - 2w_1v_1 + v_1^2 + w_2^2 - 2w_2v_2 + v_2^2 + w_3^2 - 2w_3v_3 + v_3^2 \\ &= w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) \\ &= b^2 + c^2 - 2\,\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Nun setzen wir alles zusammen:

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + c^2 - \left(b^2 + c^2 - 2\,\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}\right)}{2bc} = \frac{2\,\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}}{2bc} = \frac{\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$$

(c) Dieser Teil ist der einfachste! Wir zeichnen zunächst die Höhe h auf Seite c ein. Dann gilt $\sin(\alpha) = \frac{h}{b}$ und damit $h = b \cdot \sin(\alpha)$. Insgesamt erhalten wir

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot cb\sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin(\alpha)$$

□

Beispiel 2.15 Wir berechnen den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit $A = (2 \mid -2 \mid 3)$, $B = (6 \mid 1 \mid 7)$ und $C = (3 \mid 5 \mid 0)$.

(a) Zunächst bestimmen wir die Vektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(b) Dann berechnen wir die benötigten Längen und den Winkel $\alpha = \sphericalangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16 + 9 + 16} = \sqrt{41}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1 + 49 + 9} = \sqrt{59}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{4 + 21 - 12}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{59}} \overset{TR}{=} \frac{13}{\sqrt{2419}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{13}{\sqrt{2419}}\right) \approx 74{,}6736°$$

(c) Jetzt setzen wir alles zusammen:

$$A(ABC) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{41} \cdot \sqrt{59} \cdot \sin(74{,}6736) \approx 23{,}717$$

#

Ein Spezialfall der Winkel-Formel ist der folgende Satz:

Satz 2.16
Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind genau dann **orthogonal** zueinander, wenn $\vec{v} * \vec{w} = 0$.

Beweis: Der Winkel α muss also $90°$ oder $270°$ betragen, in beiden Fällen gilt $\cos(\alpha) = 0$. Damit:

$$0 = \cos(\alpha) = \frac{\vec{v} * \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \Longleftrightarrow \vec{v} * \vec{w} = 0$$

□

3 Geraden und Ebenen

3.1 Geraden

Viele geometrische und nicht-geometrische Problemstellungen lassen sich mit Hilfe von Geraden modellieren und lösen. Dies reicht von geradlinigen Bewegungen über die Berechnung von Schattenpunkten bis zur Kollision von Flugzeugen.

Definition 3.1 *Es seien A und B zwei Punkte.*

(a) Die **Strecke** $\overline{AB}$ *besteht den Punkten, die zusammen die kürzeste Verbindungslinie zwischen A und B bilden.*

(b) Die **Gerade** AB *entsteht dadurch, dass die Strecke $\overline{AB}$ in beide Richtungen unendlich weiter ausgedehnt wird.*

Der folgende Satz sagt uns, wie wir die Ortsvektoren der Punkte einer Geraden berechnen können:

Satz 3.2 Ein Punkt X liegt genau dann auf der Geraden AB, wenn man den Ortsvektor $\vec{x}$ $(=\vec{0X})$ von X in der Form

$$\vec{0X} = \vec{0A} + t \cdot \vec{AB}$$

schreiben kann.

Beweis: Die Punkte A, B und X liegen auf einer gemeinsamen Geraden, wenn die Vektoren $\vec{AB}$ und $\overrightarrow{AX}$ parallel sind (vgl. Abb. ??). Das bedeutet aber, dass $\overrightarrow{AX}$ ein Vielfaches von $\vec{AB}$ ist, d.h.

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AX} &&= t \cdot \vec{AB} \\ \Longleftrightarrow\quad & \vec{0X} - \vec{0A} &&= t \cdot \vec{AB} \qquad | + \vec{0A} \\ \Longleftrightarrow\quad & \vec{0X} &&= \vec{0A} + t \cdot \vec{AB} \end{aligned}$$

□

Dieser Satz führt zu folgender Definition:

Definition 3.3 *Der Ausdruck*

$$g\colon\ \vec{x} = \vec{s} + t \cdot \vec{r}$$

heißt **Parameterform** *der Geraden g. Der Vektor $\vec{s}$ heißt* **Stützvektor**, *der Vektor $\vec{r}$ heißt* **Richtungsvektor** *von g. Die Variable t heißt* **Parameter**.

Beispiel 3.4 Es seien $A = (-2 \mid 10 \mid 1)$ und $B = (1 \mid -1 \mid 0)$.

(a) Geben Sie eine Parameterform der Geraden AB an.

(b) Berechnen Sie die Koordinaten von zwei weiteren Punkten auf der Geraden AB.

(c) Prüfen Sie, ob der Punkt $C = (11{,}5 \mid -39{,}5 \mid -3{,}5)$ auf AB liegt.

(d) Geben Sie einen Punkt D an, der *nicht* auf AB liegt. Beweisen Sie, dass D tatsächlich nicht auf AB liegt.

(e) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes E, an dem die Gerade AB die x-z-Ebene durchstößt.

(f) Eine weitere Gerade h hat die Parameterform

$$h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 28 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt von AB und h.

zu (a): $AB\colon\ \vec{x} = \vec{0A} + t\cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix}$

zu (b): Wir erhalten weitere Punkte auf AB, indem wir verschiedene Werte für den Parameter t einsetzen, z.B.

$$t = -1\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 21 \\ 2 \end{pmatrix}$$ ⇒ Punkt $(-5 \mid 21 \mid 2)$.

$$t = 2\colon\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -22 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}$$ ⇒ Punkt $(1 \mid -12 \mid -1)$.

zu (c): Wir müssen prüfen, ob wir $\vec{0C}$ in der Parameterform schreiben können:

$$\begin{pmatrix} 11{,}5 \\ -39{,}5 \\ -3{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \Big| - \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13{,}5 \\ -49{,}5 \\ -4{,}5 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow t = 13{,}5/3 = 4{,}5 \\ \Rightarrow t = -49{,}5/(-11) = 4{,}5 \\ \Rightarrow t = -4{,}5/(-1) = 4{,}5 \end{array}$$

Also gehört der Parameter $t = 4{,}5$ zu C und damit liegt C auf AB.

zu (d): Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten. Z.B. nehmen wir uns einen Punkt, der auf AB liegt (z.B. A) und ändern eine einzige Koordinate. So erhalten wir z.B. $D = (0 \mid 10 \mid 1)$. Zum Beweis:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mid - \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Rightarrow t = 2/3 = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow t = 0/(-11) = 0 \ \lightning \\ \Rightarrow t = 0/(-1) = 0 \end{array}$$

Also gibt es keinen Parameter t, der zu D gehört, d.h. D liegt wie erwartet nicht auf AB.

zu (e): Die x-z-Ebene zeichnet sich dadurch aus, dass alle Punkte, die in ihr liegen, eine y-Koordinate von 0 besitzen, d.h. $y = 0$. Für den gesuchten Punkt gilt also $E = (x \mid 0 \mid z)$. Da er auf AB liegt, können wir ihn in die Parameterform einsetzen:

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0 = 10 + t \cdot (-11) \Rightarrow t = \frac{10}{11}$$

Mit $t = \frac{10}{11}$ erhalten wir nun die gesuchten Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{10}{11} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} \\ 0 \\ \frac{1}{11} \end{pmatrix} \Rightarrow E = \left(\frac{8}{11} \mid 0 \mid \frac{1}{11} \right)$$

zu (f): Der gesuchte Schnittpunkt S soll gleichzeitig auf beiden Geraden liegen. Also muss es jeweils einen Wert für den Parameter geben, der zu diesem Punkt gehört, d.h.

$$\vec{0S} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \textbf{und} \quad \vec{0S} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 28 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Also können wir die beiden rechten Seiten gleichsetzen. Wir müssen dabei nur beachten, dass die Parameter nicht denselben Namen erhalten dürfen, denn die gesuchten Werte für die Parameter müssen nicht zwangsläufig gleich sein (bei der Geraden AB könnte der Parameter $t = -3$ zum Schnittpunkt gehören und bei der Geraden h der Parameter $t = 2$). Wir erhalten:

$$\begin{pmatrix}-2\\10\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-11\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\28\\-4\end{pmatrix}\qquad \mid -\begin{pmatrix}-2\\10\\1\end{pmatrix}$$

$$t\cdot\begin{pmatrix}3\\-11\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-9\\-3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\28\\-4\end{pmatrix}\qquad \mid -s\cdot\begin{pmatrix}3\\28\\-4\end{pmatrix}$$

$$s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-28\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-11\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-9\\-3\end{pmatrix}$$

Dies ist ein LGS mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten, das wir mit dem Gaußverfahren lösen:

$$\begin{pmatrix}-3 & 3 & = & 6\\-28 & -11 & = & -9\\4 & -1 & = & -3\end{pmatrix}:(-3) \iff \begin{pmatrix}1 & -1 & = & -2\\-28 & -11 & = & -9\\4 & -1 & = & -3\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot 28\\ \\ \cdot(-7)\end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}28 & -28 & = & -56\\-28 & -11 & = & -9\\-28 & 7 & = & 21\end{pmatrix}\begin{matrix}\\+\\+\end{matrix} \iff \begin{pmatrix}1 & -1 & = & -2\\0 & -39 & = & -65\\0 & -21 & = & -35\end{pmatrix}\begin{matrix}\Rightarrow t=65:39=\frac{5}{3}\\ \Rightarrow t=5:3=\frac{5}{3}\end{matrix}$$

Also muss der Parameter t (der Geraden AB) den Wert $t=\frac{5}{3}$ haben. Wir könnten nun noch den Wert für s berechnen (über die 1. Zeile: $1s+(-1)\cdot\frac{5}{3}=-2 \iff s=-\frac{2}{3}$), aber dies ist gar nicht nötig, wir erhalten den Schnittpunkt durch Einsetzen von $t=\frac{5}{3}$:

$$\vec{0S}=\begin{pmatrix}-2\\10\\1\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\-11\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\10\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\-\frac{55}{3}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-\frac{25}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}\iff S=\left(3\mid -\frac{25}{3}\mid -\frac{2}{3}\right)$$

#

Wir fassen die bisherigen Verfahren zusammen:

Verfahren 3.5 (Parameterform aufstellen)

Gegeben: Zwei Punkte A und B

Gesucht: Parameterform der Geraden $g=AB$

Lösung: (1) Stützvektor: $\vec{s}=\vec{0A}$

(2) Richtungsvektor: $\vec{r}=\vec{AB}=\vec{0B}-\vec{0A}$

(3) g: $\vec{x}=\vec{0A}+t\cdot\vec{AB}$

Verfahren 3.6 (Punkte auf einer Geraden finden)

Gegeben: Parameterform einer Geraden g: $\vec{x} = \vec{s} + t \cdot \vec{r}$

Gesucht: Einer oder mehrere Punkte, die auf g liegen

Lösung:

(1) Wähle für jeden Punkt eine beliebige Zahl t_0

(2) Berechne den Ortsvektor des gesuchten Punktes mit Hilfe der Parameterform, indem du $t = t_0$ einsetzt:

$$\overrightarrow{0P} = \vec{s} + t_0 \cdot \vec{r}$$

(3) Schreibe den Ortsvektor als Punkt.

Verfahren 3.7 (Punktprobe)

Gegeben: Gerade g in Parameterform, Punkt P

Gesucht: Liegt P auf g?

Lösung:

(1) Setze $\overrightarrow{0P}$ mit der Parameterform von g gleich

(2) Löse das entstehende LGS.

(3) Wenn sich ein Widerspruch ergibt, liegt P nicht auf g, andernfalls schon.

Verfahren 3.8 (Schnittpunkt zweier Geraden)

Gegeben: Geraden g und h in Parameterform

Gesucht: Schnittpunkt von g und h

Lösung:

(1) Setze die Parameterformen gleich. Achtung: Die Parameter dürfen nicht gleich heißen!

(2) Löse das entstehende LGS.

(3) Wenn sich ein Widerspruch ergibt, schneiden sich die Geraden nicht, andernfalls erhält man einen der beiden Parameter.

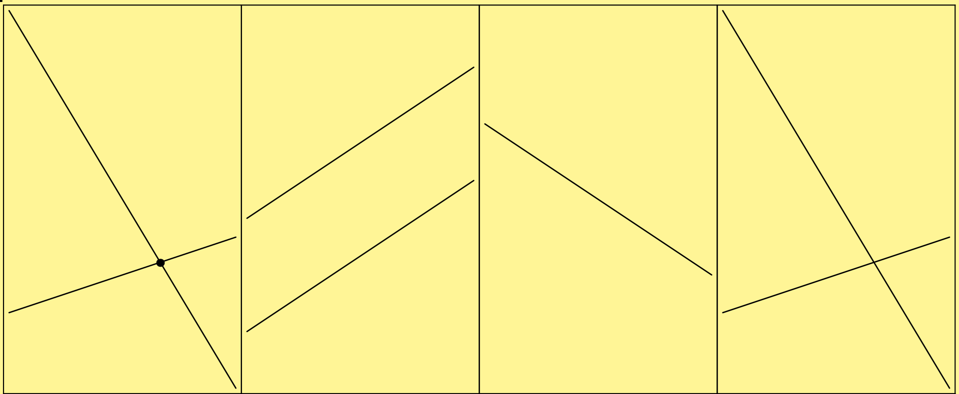
(4) Setze den gefundenen Parameter in die passende Parameterform ein, um den Ortsvektor des Schnittpunktes zu finden.

(5) Schreibe den Ortsvektor als Punkt.

3.2 Lagebeziehung zwischen Geraden

In diesem Abschnitt untersuchen wir, wie zwei Geraden zueinander liegen können. Aus der Mittelstufe kennen wir uns im zweidimensionalen Fall aus: Zwei Geraden können identisch oder (echt) parallel sein oder sie können sich in genau einem Punkt schneiden.
Im dreidimensionalen Raum kommt eine weitere Möglichkeit hinzu:

Satz 3.9 Zwei Geraden können im dreidimensionalen Raum 4 verschiedene Lagebeziehungen zueinander haben:



schneiden	(echt) parallel	unecht parallel (identisch)	windschief (voreinander)

Dabei bedeutet **windschief**, dass die beiden Geraden sich nicht schneiden und nicht parallel sind.

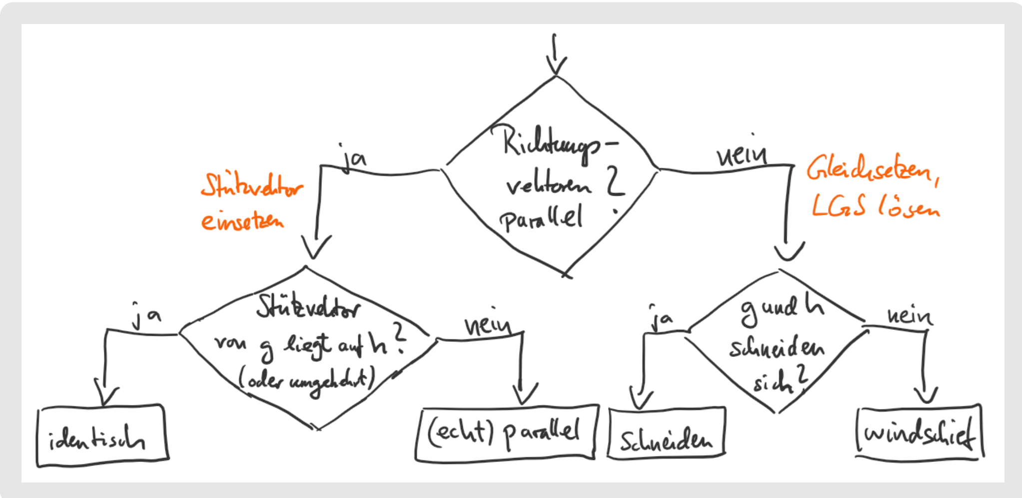


Abbildung 14 Untersuchung der Lagebeziehung zweier Geraden g und h

Das Flussdiagramm in **Abb. 14** zeigt, wie man entscheiden kann, welcher der 4 Fälle vorliegt.

Beispiel 3.10 Gegeben sind die Geraden

$$f\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 17 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 53 \\ -42 \\ 15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 32 \\ -8 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1{,}25 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie die Lagebeziehung von f und g, von f und h und von g und h.

Zu f und g: Untersuchung der Richtungsvektoren:

$$c \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow c = 4 \\ \Rightarrow c = 2 \lightning \\ \Rightarrow c = 5 \end{matrix}$$

$\Rightarrow f$ und g sind nicht parallel
$\Rightarrow f$ und g schneiden sich oder sind windschief

Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 17 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 \\ -42 \\ 15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \iff s \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -28 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 16 & -4 & = & 36 \\ -8 & 4 & = & -28 \\ 5 & -1 & = & 10 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 4 & -1 & = & 9 \\ -4 & 2 & = & -14 \\ 5 & -1 & = & 10 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 20 & -5 & = & 45 \\ -20 & 10 & = & -70 \\ -20 & 4 & = & -40 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 20 & -5 & = & 45 \\ 0 & 5 & = & -25 \\ 0 & -1 & = & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \Rightarrow t = -5 \\ \Rightarrow t = -5 \end{matrix}$$

Also schneiden sich f und g in einem Punkt. (Diesen Punkt kann man nun leicht bestimmen, weil $t = -5$ bekannt ist.)

Zu f und h: Untersuchung der Richtungsvektoren:

$$c \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1{,}25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow c = -1 \\ \Rightarrow c = -0{,}5 \lightning \\ \end{matrix}$$

$\Rightarrow f$ und h sind nicht parallel
$\Rightarrow f$ und h schneiden sich oder sind windschief

Gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 17 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 32 \\ -8 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1{,}25 \end{pmatrix} \iff t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1{,}25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 46 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -4 & -4 & = & -7 \\ 4 & 2 & = & 46 \\ -1 & -1{,}25 & = & -13 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -4 & -4 & = & -7 \\ 4 & 2 & = & 46 \\ 4 & 5 & = & 52 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -4 & -4 & = & -7 \\ 0 & -2 & = & 39 \\ 0 & 1 & = & 45 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \Rightarrow u = -19{,}5 \lightning \\ \Rightarrow u = 45 \end{matrix}$$

Also sind f und h windschief zueinander.

Zu g und h: Untersuchung der Richtungsvektoren:

$$c \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1{,}25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow c = -\frac{1}{4} \\ \Rightarrow c = -\frac{1}{4} \\ \Rightarrow c = -\frac{1}{4} \end{matrix}$$

$\Rightarrow f$ und h sind parallel
$\Rightarrow g$ und h sind echt parallel oder identisch

Liegt der Stützvektor von g auf h? Punktprobe:

$$\begin{pmatrix} 53 \\ -42 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 32 \\ -8 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1{,}25 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 43 \\ -74 \\ 23 \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1{,}25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow u = \frac{43}{4} = 10{,}75 \\ \Rightarrow u = 37 \quad ↯ \end{matrix}$$

Also sind g und h echt parallel.

#

3.3 Ebenen

Mit Hilfe von Geraden lassen sich Kanten und Linien von geometrischen Objekten modellieren. Nun befassen wir uns mit Flächen:

Definition 3.11 *Eine* ***Ebene*** *entsteht dadurch, dass man ein Dreieck in »alle Richtungen« unendlich weit ausdehnt. Wir bezeichnen die Ebene, in der das Dreieck ABC liegt mit E_{ABC}.*

Satz 3.12 Ein Punkt X liegt genau dann in einer Ebene E_{ABC}, wenn man seinen Ortsvektor $\vec{x}$ in der Form

$$\vec{x} = \vec{0A} + s \cdot \vec{AB} + t \cdot \vec{AC}$$

schreiben kann (mit $s, t \in \mathbb{R}$).
Der Ausdruck

$$E\colon\ \vec{x} = \vec{s} + s \cdot \vec{r_1} + t \cdot \vec{r_2}$$

heißt **Parameterform** der Ebene E. Genau wie bei den Geraden heißt $\vec{s}$ **Stützvektor** und $\vec{r_1}$ und $\vec{r_2}$ **Richtungsvektoren**.

Beweis: □

Beispiel 3.13 Die Wand eines Gebäudes hat die Form eines Rechtecks $ABCD$ mit den Koordinaten $A = (1 \mid 4 \mid 0)$, $B = (8 \mid 9 \mid 0)$ und $C = (8 \mid 9 \mid 6)$. Alle Koordinaten werden in Metern angegeben. Der Erdboden wird von der x-y-Ebene gebildet.

(a) Zeigen Sie, dass die Punkte ABC tatsächlich Eckpunkte eines Rechteck sein können.

(b) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D.

(c) Die Wand soll gestrichen werden, wobei $1\,\ell$ Farbe für $12\,\mathrm{m}^2$ reicht. Bestimmen Sie, wie viel Farbe für das Streichen der Wand benötigt wird.

(d) Geben Sie eine Parameterform der Ebene E an, in der die Hauswand liegt.

(e) Geben Sie zwei weitere Punkte an, die in E liegen.

(f) Prüfen Sie, ob der Punkt $P = (5{,}9 \mid 7{,}5 \mid -12)$ in E liegt.

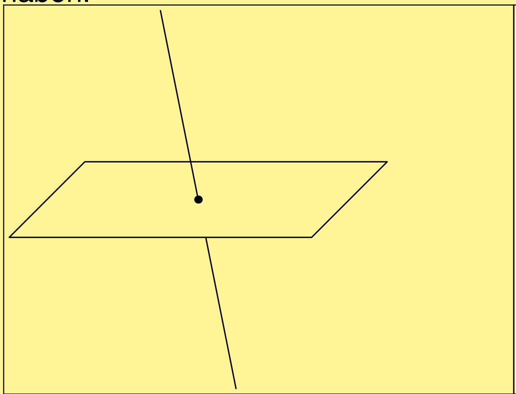
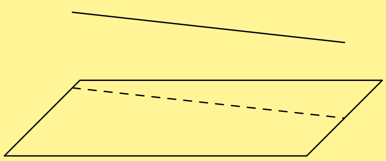
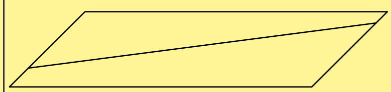
(g) Donald schaut vom Punkt $Q = (8 \mid 1 \mid 1{,}8)$ aus in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -21 \\ 17 \\ 12 \end{pmatrix}$ auf das Haus, direkt zum Fenster von Daisy. Berechnen Sie die Koordinaten des Fensters.

#

3.4 Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

Genau, wie man die Lagebeziehung zwischen zwei Geraden untersuchen kann, kann man auch analysieren, welche Lage eine Gerade zu einer Ebene einnehmen kann. Interessanterweise ist hier die Situation einfacher als zwischen zwei Geraden:

Satz 3.14 Eine Gerade g und eine Ebene E können 3 verschiedene Lagebeziehungen zueinander haben:

		
g und E schneiden sich in einem Punkt (g durchstößt E)	g und E sind parallel	g liegt vollständig in E

Beweis: Es seien

$$g\colon\ \vec{x} = \vec{a} + t\cdot\vec{r} \qquad \text{und} \qquad E\colon\ \vec{x} = \vec{b} + r\cdot\vec{r_1} + s\cdot\vec{r_2}$$

Parameterformen von g bzw. von E. Gleichsetzen führt zu einem LGS mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten.
Nun ergeben sich drei Möglichkeiten:
(1) Das LGS hat genau eine Lösung. ⇒ g und E schneiden sich in einem Punkt.

(2) Das LGS hat keine Lösung. ⇒ g und E liegen parallel zueinander.

(3) Das LGS hat unendlich viele Lösungen. ⇒ g liegt vollständig in E.

□

Beispiel 3.15 #

4 Koordinatenform und Abstände

In diesem Themenfeld vertiefen wir die analytische Geometrie und wenden uns Abstandsberechnungen zu: Was wir bereits wissen, ist, wie man den Abstand zweier Punkte P und Q berechnen kann, denn dies entspricht einfach der Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}$:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ein Ziel dieses Kapitels ist, ein Verfahren zu Bestimmung des Abstands eines Punktes von einer Ebene zu erarbeiten:
Gegeben sind ein Punkt P und eine Ebene E und es soll der Abstand von P und E berechnet werden. Wie man in Abb. ?? sehen kann, entspricht dies der Länge der Strecke d, die vom Punkt P aus senkrecht auf der Ebene E steht. Wenn wir den Punkt, an dem die Strecke d auf der Ebene steht, mit L bezeichnen (wie »Lotfußpunkt«), so entspricht der gesuchte Abstand dem Abstand von P und L.

Wir benötigen also eine Methode, um eine Geradengleichung aufzustellen, die orthogonal zu einer gegebenen Ebene steht. Interessanterweise erhalten wir gleichzeitig ein weiteres Verfahren zur Berechnung des Schnittpunkts einer Ebene mit einer Geraden, das viel einfacher ist, als das Lösen eines LGS.

4.1 Das Kreuzprodukt

Definition 4.1 *Wir definieren das* **Kreuzprodukt** *oder* **Vektorprodukt** *zweier Vektoren durch*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ w_1 v_3 - w_3 v_1 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4.2 #

Satz 4.3 Das Kreuzprodukt hat zwei phänomenale Eigenschaften:

(a) Der Ergebnisvektor steht auf beiden Vektoren senkrecht.

(b) Die Länge des Ergebnisvektors entspricht genau dem Flächeninhalt des Parallelogrammms, das von den beiden Vektoren aufgespannt wird, d.h.

$$A(\text{Parallelogramm } ABCD) = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$$

Beweis:
(a) Wir bilden das Skalarprodukt, um zu zeigen, dass der Ergebnisvektor auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$ senkrecht steht:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ w_1v_3 - w_3v_1 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= (v_2w_3 - v_3w_2) \cdot v_1 + (w_1v_3 - w_3v_1) \cdot v_2 + (v_1w_2 - v_2w_1) \cdot v_3 \\ &= v_1v_2w_3 - v_1v_3w_2 + v_2v_3w_1 - v_1v_2w_3 + v_1v_3w_2 - v_2v_3w_1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Die Rechnung für $\vec{w}$ funktioniert genauso.

(b) Diese recht langwierige Rechnung kann als Übungsaufgabe gerechnet werden.

□

Beispiel 4.4 Gegeben ist eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche ABC mit $A = (-4 \mid 7 \mid 0)$, $B = (-5 \mid -4 \mid 0)$ und $C = (-2 \mid -2 \mid 0)$ und Spitze $S = (-3 \mid 1 \mid 5)$. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

#

4.2 Koordinatenform von Ebenen

In der zweidimensionalen Ebene kennen wir mittlerweile zwei mögliche Beschreibungen für eine Gerade g:
(1) Die Parameterform aus der Oberstufe: g: $\vec{x} = \vec{s} + t \cdot \vec{r}$

(2) Die Funktionsgleichung aus der Mittelstufe: $y = mx + b$
Wir vergleichen beide Darstellungsformen anhand eines konkreten Beispiels:

Beispiel 4.5 Gegeben sind die Punkte $A = (1 \mid 4)$, $B = (5 \mid 2)$ und die Gerade $g = AB$.
(1) Die Parameterform lautet g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(2) Die Funktionsgleichung lautet zunächst $y = mx + b$. Wir erhalten $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{4} = -0{,}5$ und damit $y = -0{,}5x + b$. Einsetzen von A liefert die Gleichung

$$4 = -0{,}5 \cdot 1 + b \Rightarrow 4{,}5 = b \Rightarrow y = -0{,}5x + 4{,}5$$

Es war also aufwändiger, die Funktionsgleichung zu bestimmen. Aber welche Form ist einfacher in der Anwendung?

	Parameterform	**Funktionsgleichung**	**Einfacher ist...**
Punktprobe	Einsetzen des Punktes Lösen eines LGS mit 2 Gleichungen und 1 Unbekannten	Einsetzen des Punktes Prüfen, ob eine wahre Aussage entsteht	Funktionsgleichung
Lagebeziehung zwischen Geraden	Gleichsetzen der Geraden Lösen eines LGS mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten	Gleichsetzen Lösen einer einzelnen linearen Gleichung	Funktionsgleichung

In der Anwendung ist die Funktionsgleichung also deutlich einfacher (was auch ein Grund dafür ist, dass die Funktionsgleichung in der Mittelstufe behandelt wird). #

Wir sehen also: Im Zweidimensionalen gibt es die Möglichkeit, eine Gerade durch eine einzige lineare Gleichung zu beschreiben und diese Gleichung ist in der Handhabung deutlich einfacher als die Parameterform. Im dreidimensionalen Raum gilt dasselbe für Ebenen. Dazu benötigen wir folgenden Begriff:

Definition 4.6 *Ein Vektor $\vec{n}$ heißt* **Normalenvektor** *einer Ebene, wenn er auf beiden Richtungsvektoren (und damit auf der Ebene) senkrecht steht.*

Satz 4.7 Es sei E eine Ebene.

(a) Ein Punkt $X = (x \mid y \mid z)$ liegt genau dann auf der Ebene, wenn die **Koordinatengleichung**

$$\vec{n} * \overrightarrow{AX} = 0$$

erfüllt ist. Dabei ist A ein beliebiger Punkt auf E und $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E.

(b) Die obige Gleichung $\vec{n} * \overrightarrow{AX} = 0$ lässt sich ausmultiplizieren und vereinfachen zu der sog. **Koordinatenform**

$$E\colon ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{(alternativ auch } E\colon ax + by + cz = d\text{)}$$

der Ebene E. Es gilt der Zusammenhang $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, d.h., die Koeffizienten der Gleichung sind die Komponenten eines Normalenvektors der Ebene.

Beweis: □

Beispiel 4.8 Gegeben ist eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche ABC und Spitze $S = (4 \mid 4 \mid 5)$. Es gilt $A = (5 \mid 2 \mid 0)$, $B = (8 \mid 10 \mid 0)$ und $C = (1 \mid 8 \mid 0)$. Die Seitenfläche mit den Punkten A, B und S

liegt in der Ebene E_1, die mit den Punkten B, C und S in der Ebene E_2 und die mit den Punkten A, C und S in der Ebene E_3. Es gilt

$$E_3\colon 15x + 10y - z = 95$$

(a) Bestimmen Sie jeweils eine Koordinatenform der Ebenen E_1 und E_2.

(b) Geben Sie einen Normalenvektor der Ebene E_3 an.

(c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

(d) Ein heiliges Symbol befindet sich am Punkt $H = (5{,}35 \mid 4{,}8 \mid 2)$. Entscheiden Sie, auf welcher der Seitenflächen sich das Symbol befindet.

(e) Ein Vogel befindet sich am Punkt $F = (-6 \mid -14{,}4 \mid 13)$ und die Sonne scheint in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Analysieren Sie, auf welcher Seitenfläche der Schattenpunkt des Vogels zu sehen ist und berechnen Sie die Koordinaten des Schattenpunkts.

(f) Zeichnen Sie die Pyramide einschließlich des Vogels, dessen Schatten und dem heiligen Symbol in ein geeignetes Koordinatensystem.

(a) E_1:

(1) Parameterform: $E_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2) Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -15 \\ 14 \end{pmatrix}$

(3) Ansatz:

$$0 = \begin{pmatrix} 40 \\ -15 \\ 14 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x-5 \\ y-2 \\ z-0 \end{pmatrix} = 40(x-5) - 15(y-2) + 14z = 40x - 200 - 15y + 30 + 14z$$

(4) Koordinatenform: $E_1\colon 40x - 15y + 14z - 170 = 0$

(b) E_2:

(1) Parameterform: E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}$

(2) Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 35 \\ 34 \end{pmatrix}$

(3) Ansatz:

$$0 = \begin{pmatrix} -10 \\ 35 \\ 34 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x-8 \\ y-10 \\ z-0 \end{pmatrix} = -10(x-8) + 35(y-10) + 34z = -10x + 80 + 35y - 350 + 34z$$

(4) Koordinatenform: E_2: $-10x + 35y + 34z - 270 = 0$

(c) Man kann den Normalenvektor an der Koordinatengleichung ablesen:

$$\boxed{15}x + \boxed{10}y + \boxed{(-1)}z = 95 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(d) Ansatz: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot G \cdot 5$ ($h = z$-Koordinate von S)
Berechnung von G (halbes Parallelogramm):

$$G = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot 50 = 25$$

Insgesamt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 5 = \frac{125}{3} = 41{,}\overline{6}$$

(e) Wir machen eine Punktprobe für H und die drei Ebenen, bis wir die Ebene gefunden haben, auf der $H = (5{,}35 \mid 4{,}8 \mid 2)$ liegt:

$$E_1: \ 40 \cdot 5{,}35 - 15 \cdot 4{,}8 + 14 \cdot 2 - 170 = 214 - 72 + 28 - 170 = 0$$

Also liegt H auf der Ebene E_1.

(f) $F = (-6 \mid -14{,}4 \mid 13)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(1) Schattengerade: $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -14{,}4 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+t \\ -14{,}4+2t \\ 13-t \end{pmatrix}$

(2) Schnittpunkt mit der E_1-Ebene, einsetzen:

$$\begin{aligned} & 40 \cdot (-6+t) - 15 \cdot (-14{,}4+2t) + 14 \cdot (13-t) - 170 &&= 0 \\ \iff & -240 + 40t + 216 - 30t + 182 - 14t - 170 &&= 0 \\ \iff & -4t - 12 &&= 0 \\ \iff & t &&= -3 \end{aligned}$$

Also liegt der Schnittpunkt »hinter« dem Vogel, also kann diese Ebene nicht in Frage kommen.

(3) Schnittpunkt mit der E_2-Ebene, einsetzen:

$$\begin{aligned} & -10 \cdot (-6+t) + 35 \cdot (-14{,}4+2t) + 34 \cdot (13-t) - 270 &&= 0 \\ \iff & 60 - 10t - 504 + 70t + 442 - 34t - 270 &&= 0 \\ \iff & 26t - 272 &&= 0 \\ \iff & t &&= \frac{272}{26} \approx 10{,}46 \end{aligned}$$

(4) Schnittpunkt mit der E_3-Ebene, einsetzen:

$$\begin{aligned} & 15 \cdot (-6+t) + 10 \cdot (-14{,}4+2t) - (13-t) - 95 &&= 0 \\ \iff & -90 + 15t - 144 + 20t - 13 + t - 95 &&= 0 \\ \iff & 36t - 342 &&= 0 \\ \iff & t &&= \frac{342}{36} = 9{,}5 \end{aligned}$$

(5) Da $9{,}5 < 10{,}46$ trifft der Schatten zuerst auf die Ebene E_3, also liegt dort der Schattenpunkt F':

$$\overrightarrow{0F'} = \begin{pmatrix} -6 \\ -14{,}4 \\ 13 \end{pmatrix} + 9{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 4{,}6 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow F' = (3{,}5 \mid 4{,}6 \mid 3{,}5)$$

#

Verfahren 4.9 (Überführen einer Ebene in die Koordinatenform)

Gegeben: Ebene in Parameterform

Gesucht: Koordinatenform von E

Lösung:

(1) Wähle beliebigen Punkt A auf E (z.B. Stützvektor)

(2) Berechne einen Normalenvektor $\vec{n}=\vec{r_1} \times \vec{r_2}$

(3) Ansatz: $\vec{n} * \overrightarrow{AX}= 0$ mit $X = (x \mid y \mid z)$

(4) Ausmultiplizieren und vereinfachen zu $ax + by + cz + d = 0$

Verfahren 4.10 (Punktprobe bei einer Ebene in Koordinatenform)

Gegeben: Ebene E in Koordinatenform, Punkt P

Gesucht: Liegt P auf E?

Lösung: (1) Setze die Koordinaten von P für x, y und z ein.

(2) Wahre Aussage: $P \in E$; Widerspruch: $P \notin E$

Verfahren 4.11 (Bestimmen von Punkten in einer Ebene in Koordinatenform)

Gegeben: Ebene E in Koordinatenform

Gesucht: Einer oder mehrere Punkte auf E

Lösung: (1) Für jeden Punkt: Setze für zwei Koordinaten beliebige Werte ein und berechne die dritte Koordinate.

Verfahren 4.12 (Lagebeziehung zwischen einer Geraden in Parameterform und einer Ebene in Koordinatenform)

Gegeben: Ebene E in Koordinatenform, Gerade g in Parameterform

Gesucht: Lagebeziehung zwischen g und E

Lösung: (1) Fasse die Parameterform von g zu einem einzelnen Vektor zusammen.

(2) Setze diesen Vektor für x, y und z ein. Du erhältst eine Gleichung mit einer Unbekannten (dem Parameter der Geraden).

(3) Berechne den Parameter.

(4) Drei Möglichkeiten:

(a) Es gibt keine Lösung: g und E sind parallel.

(b) Es gibt unendlich viele Lösungen: g liegt komplett in E.

(c) Es gibt genau eine Lösung: Setze den Parameter in die Geradengleichung ein und berechne den Durchstoßpunkt.

4.3 Überführen der Koordinatenform in die Parameterform

Es ist natürlich auch möglich, eine Ebene, die in Koordinatenform gegeben ist, in die Parameterform zu überführen. Es gibt allerdings keinen sinnvollemn Grund, dies zu tun, da die Koordinatenform in allen Belangen besser ist als die Parameterform. Da es dann neue Kerncurriculum aber explizit fordert (»Umwandeln der verschiedenen Darstellungsformen ineinander«), werden wir es aber trotzdem behandeln.

Verfahren 4.13 (Umwandeln in die Parameterform)

Gegeben: Ebene in Koordinatenform

Gesucht: Parameterform der Ebene

Lösung:

(1) Löse die Koordinatengleichung nach einer Variablen auf

(2) Setze die entstandene Gleichung für die entsprechende Variable in den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ein und forme den Vektor in die Parameterform um, indem du in drei Vektoren aufteilst (je einen für jede Variable, einen ohne Variablen). Die beiden anderen Variablen werden dabei zu den Parametern.

Beispiel 4.14 Überführe die Ebene E: $2x - 3y + 4z - 5 = 0$ in eine Parameterform:

(1) Auflösen nach z.B. x: $x = 1{,}5y - 2z + 2{,}5$

(2) Einsetzen und umformen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5y - 2z + 2{,}5 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3) Insgesamt: $E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

#

4.4 Abstand Punkt-Ebene

Abschließend wenden wir uns der ursprünglichen Problemstellung dieses Kapitels zu: Die Bestimmung des Abstands eines Punktes von einer Ebene. Dazu benötigen wir folgenden Begriff:

Definition 4.15 *Projiziert man einen Punkt P senkrecht auf eine Ebene E, so erhält man den* **Lotfußpunkt** *F_P von P auf E.*

Genauer: F_P ist der Punkt auf E, für den der Vektor $\overrightarrow{F_P P}$ senkrecht auf E steht (vgl. Abb ??).

Damit erhalten wir folgende Verfahren:

Verfahren 4.16 (Bestimmung des Lotfußpunktes bzw. Abstand Punkt-Ebene)

Gegeben: Ebene E, Punkt P

Gesucht: Lotfußpunkt L_P von P auf E bzw. Abstand P zu E

Lösung:

(1) Bestimme einen Normalenvektor $\vec{n}$ von E (in Koordinatenform: ablesen, in Parameterform: Kreuzprodukt).

(2) Stelle die Gerade auf, die durch P verläuft und senkrecht auf E steht:

$$g\colon\ \vec{x} = \vec{0P} + t \cdot \vec{n}$$

(3) Der Lotfußpunkt L_P ist der Schnittpunkt von g und E.

(4) Der gesuchte Abstand ist der Abstand der Punkte L_P und P.

Beispiel 4.17 Berechne den Abstand von $P = (3 \mid 2 \mid 4)$ zur Ebene $E\colon 2x - y + z - 4 = 0$:

(1) Normalenvektor ablesen: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) Gerade: $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) Schnittpunkt mit E:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ 2-t \\ 4+t \end{pmatrix}$$

Einsetzen in E:

$$\begin{aligned} 2(3+2t) - (2-t) + (4+t) - 4 &= 0 \\ 6 + 4t - 2 + t + 4 + t - 4 &= 0 \\ 4 + 6t &= 0 \\ t &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Lotfußpunkt bestimmen:

$$\overrightarrow{0L_P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow L_P = (\frac{5}{3} \mid \frac{8}{3} \mid \frac{10}{3})$$

Abstand bestimmen:

$$\text{Abstand } P \text{ zu } E = \left|\overrightarrow{PL_P}\right| = \left|\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-\frac{4}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2} = \sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1{,}633$$

#